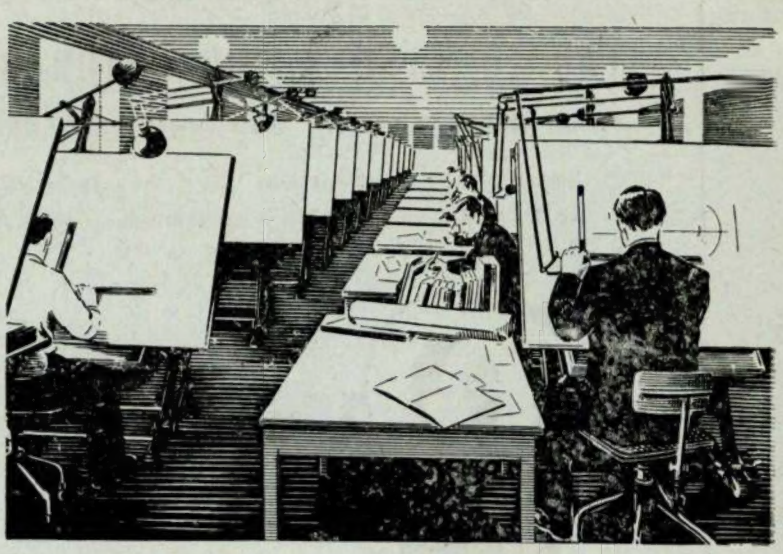
SECÇÃO DE PROPOSTAS

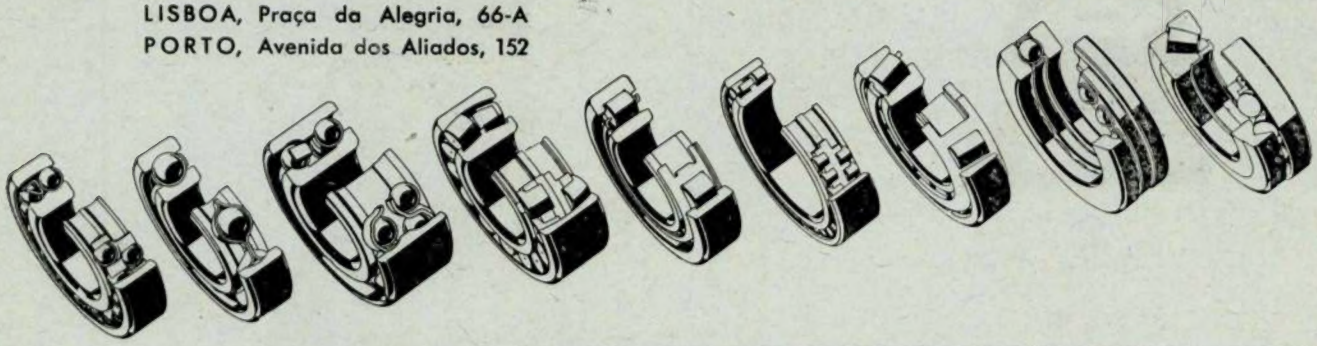
Em todos os estabelecimentos SKF existem técnicos e engenheiros especializados ao dispor de quem os queira consultar sobre tudo quanto diga respeito a rolamentos, bem como a prestarem toda a colaboração na escolha dos mesmos e controlar a sua montagem.

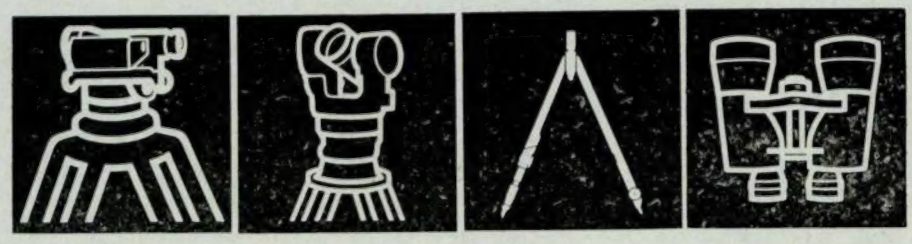
Também, para um maior desenvolvimento do seu serviço técnico, faz a SKF um constante intercâmbio entre os seus estabelecimentos de todo o mundo.

SOCIEDADE SKF LIMITADA

LISBOA, Praça da Alegria, 66-A
PORTO, Avenida dos Aliados, 152







TEODOLITOS — TAQUEÓMETROS AUTO-REDUCTORES — NÍVEIS DE ÓCULO — ALIDADES — BINÓCULOS — MATERIAL DE DESENHO

INSTRUMENTOS DE FAMA MUNDIAL
PELA PERFEIÇÃO TÉCNICA E PRECISÃO

KERN & CIE, S. A., AARAU, SUÍÇA

Representante em Portugal:

EMÍLIO DE AZEVEDO CAMPOS & CA., LDA.

CASA FUNDADA EM 1854

P. Santo António, 137-145 — Porto — Tel. 2 02 54/5/6
R. Antero Quental, 17-1.º — Lisboa — Tel. 55 33 66

PEÇA-NOS CATÁLOGOS DESCRITIVOS

Kern SWISS

C. D. U. 622.755

Verificação da lei de Tillé para a distribuição dos caudais nos hidrociclones

Pelo Eng.º de Minas (I. S. T.) NUNO GONÇALO BACHA DE ALMEIDA RIBEIRO
Assistente do I. S. T.
Ex-Bolseiro do I. A. C. na C. E. E. N. — Laboratório de Tratamento de Minérios

1 — Introdução

1.1 — Nos últimos tempos tem-se procurado utilizar forças diferentes das da gravidade para provocar a hidroconcentração. É o que acontece nos hidrociclones.

Sabe-se que, num fluido com partículas sólidas em suspensão, as forças gravitacionais provocam descida mais rápida das partículas de maior calibre ou das que, tendo o mesmo calibre e forma, tenham maior densidade. Uma maneira de activar este processo é fazer actuar sobre as partículas sólidas outras forças mais intensas que as da gravidade. Consegue-se este objectivo injectando, por meio de uma bomba, o líquido, com o sólido em suspensão, através de um orifício de entrada, tangencialmente à superfície interior do corpo cilíndrico ou cilíndrico-cónico do aparelho de concentração. É este o princípio do hidrociclone, no qual as partículas sólidas são, assim, submetidas a uma força centrífuga, cuja acção provoca hidroclassificação muito acentuada.

Embora sejam completamente conhecidos os fenómenos que ocorrem quando uma partícula material isolada evolui num fluido homogéneo, infinito e isótropo, o mesmo não acontece se se trata dum meio heterogéneo, de numerosas partículas, confinadas num volume limitado, como é o caso do hidrociclone, pois aí teremos de contar, não só com a acção mútua entre as partículas, como com os efeitos de parede.

Neste caso, para a determinação do comportamento das partículas há necessidade de recorrer a ensaios práticos, dada a grande dificuldade teórica de definir todos os parâmetros da ciclonagem e de equacionar as leis quantitativas que regem os fenómenos postos em jogo.

1.2 — Dado o interesse deste problema montámos, na Lavaria Piloto, do Laboratório de Preparação de Minérios da C. E. E. N., um circuito contínuo para o estudo da ciclonagem, à escala industrial, de minérios portugueses de urânio.

Assim, para perfeita conexão dos diferentes órgãos de tal circuito, julgou-se necessário determinar, em primeiro lugar, a influência de vários parâmetros no funcionamento do ciclone existente, para que se conhecesse a respectiva distribuição de caudais.

1.3 — Embora exista uma considerável bibliografia sobre a utilização de ciclones para espessamento e clarificação de polpas, o seu uso como processo de concentração de minérios é recente, nomeadamente quanto a minérios de urânio, onde a sua aplicação teve início em 1957, nos E. U. A. Infelizmente, não foram publicados relatórios com os resultados daquela aplicação.

Os primeiros trabalhos importantes sobre ciclonagem foram realizados a partir da última guerra, pela Dutch State Mines, em Limbury, Holanda (1). Esta empresa, nas suas minas de carvão, utiliza ciclones de 350 mm para recuperação de areias de calibres inferiores a 50 mm, areias essas que são usadas como adensadoras do «meio» nas lavagens de carvão.

No entanto, foi R. Tillé que deu a primeira contribuição para o estudo teórico do ciclone com a sua lei relacionando os caudais com os diâmetros dos orifícios de saída.

M. Stass, no Congresso Internacional da Concentração de Minérios, realizado em Stockholm em 1957, apresentou um interessante trabalho (1) procurando verificar as leis propostas por R. Tillé, onde conclui que a referida lei deveria ser

(1) M. Stass (1957). The influence of the orifices on the Washing Characteristics of the Hydrocyclone. International Mineral dressing congress, Stockholm, 1958.

afectada de constantes que provàvelmente dependiam das características geométricas de cada ciclone. Pareceu-nos assim lógico verificar, para o ciclone de que dispúnhamos, as leis propostas por R. Tillé e M. Stass e também determinar, para o caso concreto em estudo as leis que relacionam os diâmetros com as densidades do «meio» utilizado, do espessado e do transbordo do ciclone.

2 — Montagem e técnica operatória

2.1 — A montagem do ciclone-se fez conforme o esquema da fig. 1.

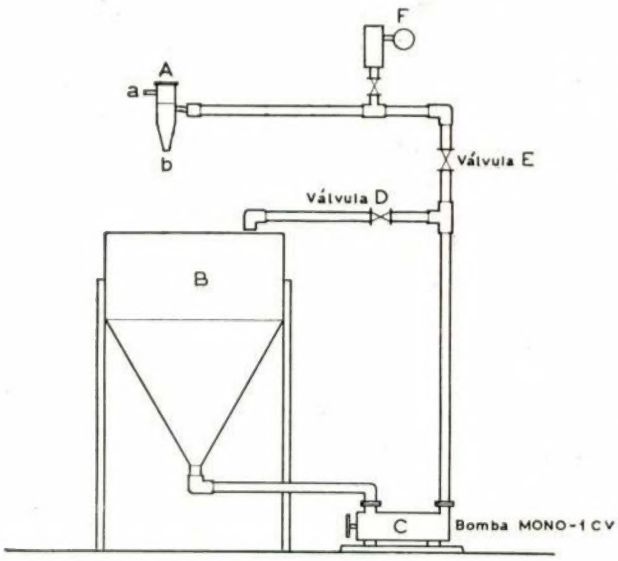


Fig. 1 — Esquema da instalação experimental do microciclone de 1"

A um depósito B ligou-se uma bomba tipo MONO, de 1 CV, destinada a impulsionar o produto a concentrar para o ciclone A. Completou-se o sistema com um manómetro F e com as válvulas de comando E e D, esta última intercalada num *by-pass*.

2.2 — Para a preparação de cada um dos ensaios procedeu-se do seguinte modo:

a) Fechou-se a válvula E e abriu-se a válvula D.

b) Introduziu-se em B água e o minério.

c) Arrancou-se com a bomba C.

Ficava-se então em condições de iniciar os ensaios pròpriamente ditos (1).

2.3 — Para a realização daqueles, abriu-se a válvula E e foi-se fechando a válvula D até se obter em F a pressão de trabalho desejada. Colheram-se, em cada ensaio, duas amostras, em *a* e *b*.

3 — Ciclone

Na fig. 2 apresenta-se o desenho do ciclone utilizado nas experiências.

Consta essencialmente de dois corpos, um cilíndrico que se denomina «cabeça», e outro cilindro-cónico, que se denomina «corpo do ciclone».

A cabeça do ciclone dispõe, superiormente, de uma tampa roscada e, inferiormente, é tapada por um septo metálico que tem ao centro um orifício (2) que se prolonga por um tubo. É possível fazer variar o diâmetro deste orifício (2), introduzindo no tubo pequenas peças metálicas com orifícios calibrados.

Na cabeça do ciclone há ainda um orifício para a saída dos produtos ciclonados, que se indica com o número (3).

No corpo do ciclone, na sua zona cilíndrica, há um orifício de entrada dos produtos a ciclonar (4). O eixo deste orifício é tangencial à parede interior do corpo do ciclone.

No vértice do corpo do ciclone, dispõe-se de uma peça roscada onde podem ser adaptados bicos com os diâmetros de saída convenientes.

O orifício de saída do ciclone é indicado pelo número (1).

Daqui em diante, tudo o que se refira aos diferentes orifícios do ciclone será afectado com os convenientes dígitos 1, 2, 3 ou 4.

4 — Numenclatura usada

É conveniente definir os diferentes símbolos usados.

Assim temos:

1 — indica o orifício de descarga dos espessados

2 — indica o orifício de descarga do transbordo

(1) — Se se pretendesse ensaiar com «meio denso», criado por exemplo por magnetite, para aumentar a densidade da polpa, a introdução desta seria feita em B, com a bomba C em funcionamento, para se obter um meio tão homogéneo quanto possível.

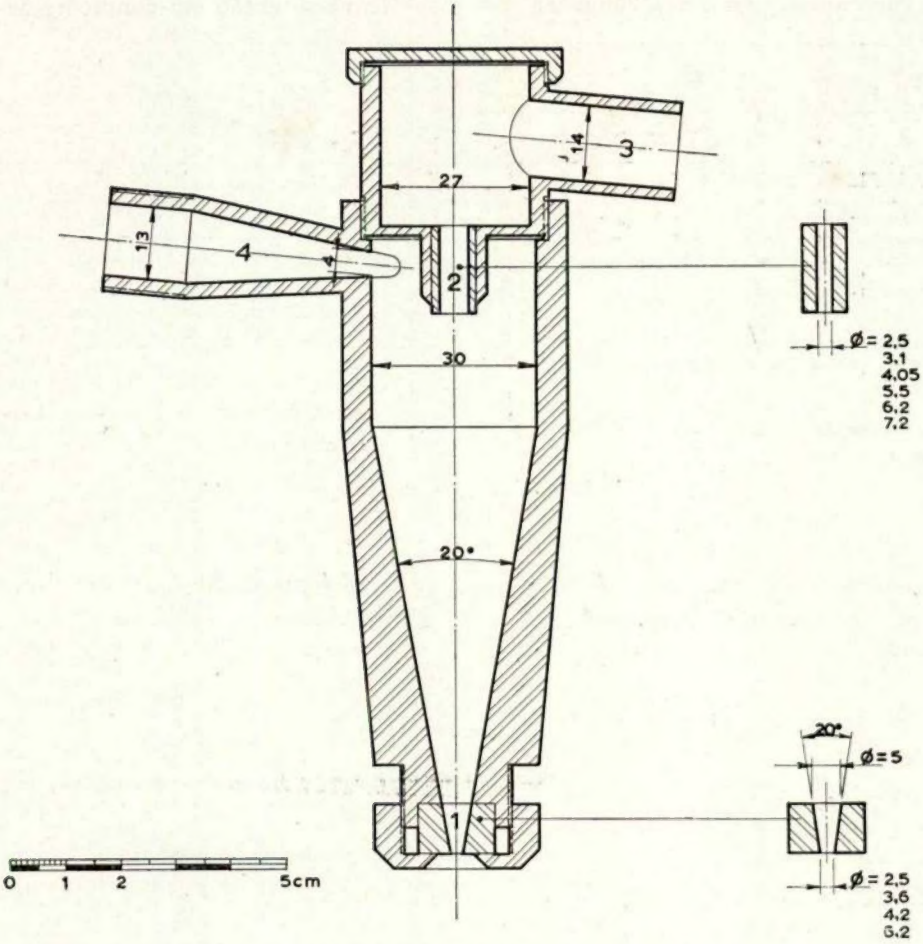


Fig. 2 — Microciclone de 1"

P_0 — pressão de trabalho do ciclone
D_1 — diâmetro do orifício de descarga dos espessados
D_2 — diâmetro do orifício de descarga do transbordo
Q_0 — caudal total da alimentação
Q_1 — caudal do espessado
Q_2 — caudal do transbordo
d_0 — densidade da alimentação
d_1 — densidade no orifício de descarga
d_2 — densidade do transbordo.

5 — Condições de realização dos ensaios

Tillé e Stass verificaram que a densidade do fluido utilizado na ciclonagem tinha pequena influência na lei que relaciona D_1/D_2 com Q_1/Q_2. Assim, nas experiências realizadas, utilizou-se ùnicamente água.

Os diâmetros dos orifícios fizeram-se variar, utilizando bicos com os diâmetros seguintes:

D_1	2,5	3,6	4,2	6,4	
D_2	2,5	3,1	4,05	5,5	7,2

A pressão de alimentação foi de $P_0 = 2,5$ kg.cm^{-2}.

6 — Resultados

Os resultados obtidos constam do quadro na página seguinte:

7 — Análise dos resultados

7.1 — Com os valores obtidos traçou-se, em coordenadas logarítmicas, a curva que consta da fig. 3.

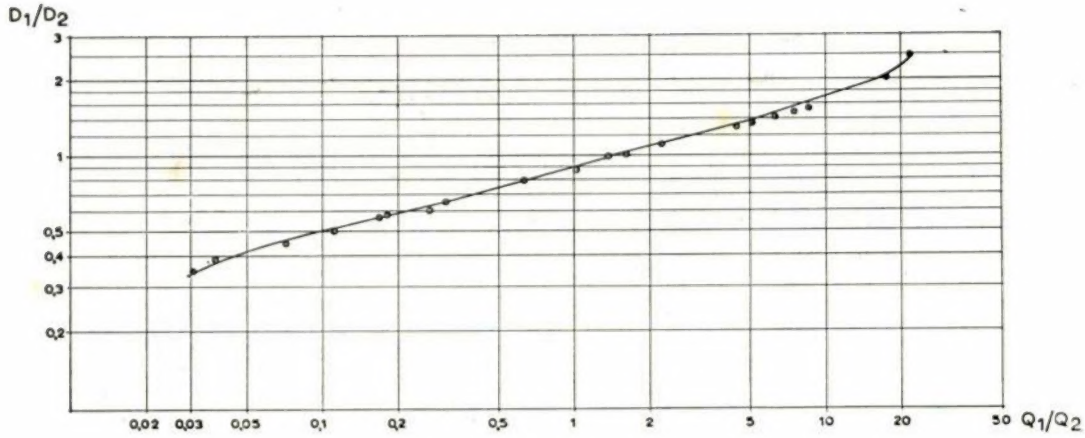


Fig 3 — Variação de D_1/D_2 em função do Q_1/Q_2

Esta curva, entre os valores de D_1/D_2 0,65 e 1,4 pode considerar-se uma recta, pelo que é possível escrever

$$\log \frac{Q_1}{Q_2} = n \log \frac{D_1}{D_2} + \log K$$

ou

$$\frac{Q_1}{Q_2} = K \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^n$$

D_1/D_2	Q_1/Q_2
0,348	0,0304
0,403	0,0380
0,455	0,0722
0,500	0,113
0,580	0,175
0,583	0,182
0,617	0,274
0,655	0,311
0,763	0,497
0,806	0,645
0,888	1,000
1,032	1,338
1,036	1,610
1,125	2,254
1,355	3,880
1,440	4,070
1,531	7,400
1,580	8,680
2,000	17,500
2,480	19,347
2,560	21,929

R. Tillé propunha, para aquela zona da curva, a fórmula

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{D_1}{a \,.\, D_2}\right)^n \qquad (1)$$

indicando para *a* e *n* os valores, respectivamente, 0,921 e 3,5.

Para o nosso ciclone, conforme as determinações que efectuámos, obtivemos

$$n = 3{,}757$$
$$a = 0{,}990$$

que, substituídos em (1), dão:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{D_1}{0{,}990 \,.\, D_2}\right)^{3{,}757} \qquad (2)$$

As deflexões que se observam para cada lado do intervalo compreendido entre os valores de D_1/D_2 0,65 e 1,4 corresponderam a ter-se, para pequenos e grandes valores de D_1/D_2, verificado, num dos orifícios, a entrada de ar em vez de saída de polpa.

Notou-se a ocorrência de dois casos:

a) Com D_1 muito pequeno e D_2 muito largo todo o caudal saía por D_2, verificando-se sucção de ar através de D_1.

b) Com D_2 muito pequeno e D_1 muito largo verificou-se o contrário, com toda a saída por D_1.

Entre estes dois casos, o caudal é distribuído entre os dois orifícios de acordo com a lei expressa em (2).

7.2 — Sendo:

$$Q_1 + Q_2 = Q_0$$

e

$$Q_1 d_1 + Q_2 d_2 = Q_0 d_0$$

ou

$$d_1 = d_0 + (d_0 - d_2) \frac{Q_2}{Q_1}$$

pode escrever-se, de acordo com (1),

$$d_1 = d_0 + (d_0 - d_2) \left(\frac{a D_2}{D_1} \right)^n$$

ou seja

$$\frac{D_1}{D_2} = 0{,}990 \left(\frac{d_0 - d_2}{d_1 - d_0} \right)^{\frac{1}{3{,}757}} \qquad (3)$$

8 — Conclusões

Pela fórmula (3) atrás deduzida é possível, para cada valor d_0 da densidade da polpa a ciclonar, determinar a curva de variação da relação D_1/D_2 dos diâmetros dos orifícios de descarga do espessado e do transbordo do ciclone estudado com a densidade d_1 do produto espessado.

Torna-se assim possível seleccionar os pares valores (D_1/D_2) que permitem obter, com aquele ciclone, uma densidade de espessado d_1 correspondente à melhor recuperação.

C. D. U. 621.311.5/91

Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional

— Elementos extraídos das estatísticas mensais do Repartidor Nacional de Cargas (R. N. C.)

NOTA: *As produções e os consumos das empresas do R. N. C. representam cerca de 94 °/₀ dos totais do País.*

JANEIRO

I — Breve nota mensal

Sob o ponto de vista hidrológico, o mês de Janeiro apresentou-se, no conjunto, muito acima da média.

II — Elementos gerais (GWh)

a) Mensais

	1961	1962	Variação °/₀
Produção hidráulica (P_h) . . .	302,6	322,3	+ 7
Produção térmica (P_t)	0,0	0,0	0
Produção total (P_T)	302,6	322,3	+ 7
Exportações (Ex)	—	0,0	—
Importações (I)	—	0,0	—
Produção para consumos não perman. (P_{cnp}) . .	55,4	60,3	+ 9
Produção para consumos permanentes (P_{cp}) (1)	247,2	262,0	+ 6,0 (2)

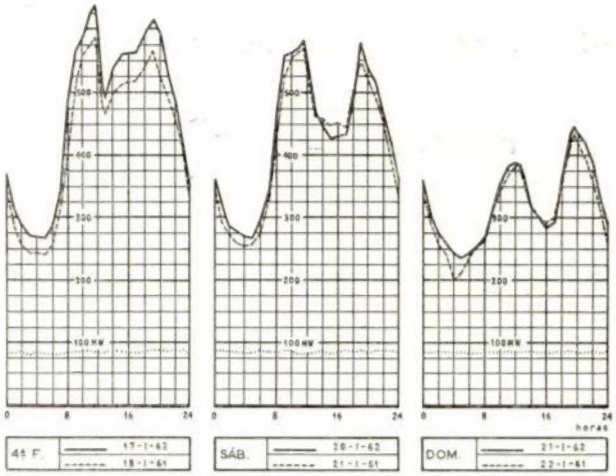
NOTAS:

(1) A produção para consumos permanentes (P_{CP}) é determinada pela seguinte expressão: $P_{CP} = P_T - P_{cnp} + I - E_X$

(2) O aumento percentual de produção para consumos permanentes, tendo em conta a incidência dos domingos e dias especiais, é de 7,8 °/₀.

III — Diagramas de carga dos dias característicos

	4.ª feira: 18-1-961	4.ª feira: 17-1-962
Produção hidráulica (P_h) — MWh	10430	11367
Produção térmica (P_t) — MWh . .	0	0
Produção total (P_T) — MWh . . .	10430	11367
Trocas com Espanha: Exportações MWh .	—	—
Trocas com Espanha: Importações MWh .	—	—
Produção para consumos não permanentes — MWh.	1644	1954
Potência máxima MW	581,5	638,5
Potência mínima MW	241,0	268,0
Utilização da ponta (U) — horas	17,9	17,8
Factor de carga (α)	0,75	0,74
Relação $\frac{\text{Pot. mín.}}{\text{Pot. máx.}}$ (r)	0,41	0,42



IV — Energia armazenada nas principais albufeiras

Albufeiras:	No fim do mês: GWh	No fim do mês: °/₀ (1)
Paradela	220,4	99,1
Venda Nova	102,6	80,2
Salamonde	23,5	85,1
Caniçada	31,7	95,8
Cabril	314,3	92,6
Castelo do Bode	151,8	93,1
Guilhofrei	7,5	90,4
Lagoa Comprida	25,5 (2)	81,6
Santa Luzia	56,2	91,2
Pracana	11,4	88,4
Póvoa	8,9 (3)	72,1
Total . . .	953,8	91,4

Notas:

(1) Coeficiente de enchimento em energia das albufeiras.

(2) Inclui 1,5 GWh armazenados em Vale do Rossim no fim do mês.

(3) Inclui 1,4 GWh armazenados no açude do Poio no fim do mês.

VÁLVULAS

PASSAGEM • RETENÇÃO • REGULAÇÃO • CUNHA

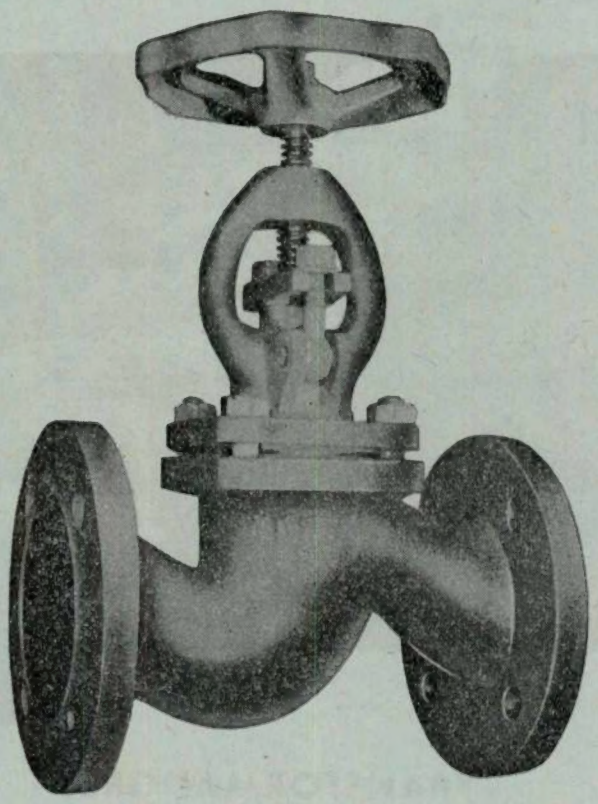
PARA LÍQUIDOS, VAPORES E GASES INCL. **NH_3** E **SO_2**

DN 10 m/m ATÉ 400 m/m
PN 6 a 40 KGS / CM2

CONFORME NORMAS **DIN** E **ASA**

EXECUÇÃO EM FERRO FUNDIDO, FERRO FUNDIDO C/ GRAFITE ESFEROIDAL, AÇO VASADO E AÇO INOXIDÁVEL

VÁLVULAS DE SEGURANÇA, DE REDUÇÃO, COM DIAFRAGMA, ELECTRO-MAGNÉTICAS E VÁLVULAS ESPECIAIS.



·ESTUDOS·
·PROJECTOS·
·ORÇAMENTOS·

SOCIEDADE PORTUGUESA DE VÁLVULAS, L.DA

RUA ACADEMIA DE CIÊNCIAS, 5 – LISBOA
TELEFONES: 31710 / 31718 / 31719

PORTO: PRAÇA D. JOÃO I, 25-1.º – TELEFONE 24771

VÁLVULAS DE QUALIDADE PARA TODAS AS APLICAÇÕES

máquinas léctricas

TRANSFORMADORES

LICENÇA SIEMENS SCHUCKERT

ATÉ 1600 kVA 35 kV

MOTORES TRIFÁSICOS ASSINCRONOS

ATÉ 120 Cv

EMPRESA NACIONAL DE APARELHAGEM ELÉCTRICA, S. A. R. L. AV. 24 DE JULHO, 158 — LISBOA

DISTRIBUIDORES EXCLUSIVOS MOTRA EQUIPAMENTOS ELÉCTRICOS, S. A. R. L.

AV. INFANTE SANTO, 56 D-1.º LISBOA — TEL. 66 10 69 — 66 10 36

C. D. U. 621.39 : 517.56

DETERMINAÇÃO DO ESPECTRO DE POTÊNCIA A PARTIR DE REGISTOS CRONOLÓGICOS

FERNANDO EDUARDO REBELO SIMÕES

Centro de Estudos de Electrónica da Comissão
de Estudos de Energia Nuclear do Instituto de Alta Cultura
Assistente do Instituto Superior Técnico

SUMÁRIO

Faz-se o estudo comparativo do método de análise directa de frequência e do método de autocorrelação, para a determinação do espectro de potência a partir de registos cronológicos, mostrando-se como a própria limitação dos registos conduz naturalmente à noção de «janela» utilizada nos referidos métodos por Blackman & Tukey (1), *e por Ackasu* (2).

SUMMARY

The autocorrelation analysis and direct Fourier analysis are compared, for the determination of the power spectrum from time records. It is shown how the limitations of the records give rise to the concept of «window» which is used in those methods by Blackman & Tukey (1), *and by Ackasu* (2).

Por se tratar de um assunto actual e de grande interesse tem-se ocupado o Centro de Electrónica, desde há algum tempo, com os problemas da Análise Harmónica Generalizada.

A aplicação e o interesse que estas técnicas têm encontrado, nomeadamente por parte do Laboratório Nacional de Engenharia Civil, têm constituído um forte estímulo para o prosseguimento deste estudo.

O presente artigo dá continuidade aos artigos publicados pelo Prof. Abreu Faro (3) *sobre o mesmo assunto, e resulta justamente da necessidade de precisar de modo quantitativo os métodos de análise preconizados nas referidas publicações.*

Este trabalho integra-se num projecto de investigação científica sobre Análise Harmónica Generalizada e nele se utiliza material de laboratório que foi adquirido através de um subsidio que a NATO concedeu ao Laboratório de Telecomunicações do I. S. T. para este projecto de investigação. Além deste material utiliza-se ainda material pertencente ao Centro de Estudos de Electrónica.

1. INTRODUÇÃO

1.1. Um conceito fundamental na teoria dos processos estocásticos, e de grande interesse nas aplicações, é o de *densidade espectral de potência*, ou como é mais correntemente designado, *espectro de potência*.

Esta grandeza, W (f), pode definir-se duma maneira estatística, a partir das funções s^i (t) representativas do processo, e supostas de duração ilimitada.

Designemos por s^i_T (t) a função s^i (t) restringida ao intervalo $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$.

A expressão do conteúdo quadrático médio (no tempo) de s^i (t), relativo ao mesmo intervalo T) será dada por

$$P^i_T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [s^i_T (t)]^2 \, dt \tag{1.1}$$

(1) Ref. [1]
(2) Ref. [2]
(3) Ref. [3]

Consideremos agora a nova função $s'^{i}_{T}(t)$, definida em todo o domínio:

$$s'^{i}_{T}(t) = \begin{cases} s^{i}_{T}(t) = s^{i}(t) & |t| \leqslant \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \tag{1.2}$$

e seja $S^{i}_{T}(f)$ o seu espectro de Fourier no domínio da frequência.

Utilizando a relação de Parseval, podemos escrever

$$P^{i}_{T} = \int_{-\infty}^{\infty} W^{i}_{T}(f)\, df \quad (1)$$

em que

$$W^{i}_{T}(f) = \frac{1}{T} \left| S^{i}_{T}(f) \right|^{2}$$

ou, fazendo intervir os dados,

$$W^{i}_{T}(f) = \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} s^{i}_{T}(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \right|^{2} \tag{1.3}$$

1.2. Consideremos agora as duas operações seguintes

— passagem ao limite, quando T tende para infinito . . . . . $\lim\limits_{T \to \infty}$

— média, no conjunto das funções $s^{i}(t)$ . . . . . $< >$

Verifica-se que se tem em geral para os processos estocásticos as seguintes relações:

$$< \lim_{T \to \infty} P^{i}_{T} > \; = \lim_{T \to \infty} < P^{i}_{T} > = P$$

$$< \lim_{T \to \infty} W^{i}_{T}(f) > \; \neq \lim_{T \to \infty} < W^{i}_{T}(f) > = W(f)$$

por $W^{i}_{T}(f)$ não convergir geralmente para um limite. Pode finalmente escrever-se

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} W(f)\, df \tag{1.4}$$

$$W = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} < \left| \int_{-T/2}^{T/2} s^{i}_{T}(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \right|^{2} > \tag{1.5}$$

em que P representa a potência média, no tempo e no conjunto, do processo, e W(f), a densidade espectral correspondente, isto é, aquilo que se designa correntemente por espectro de potência e que nos propomos calcular.

1.3. Um outro conceito igualmente importante é o de *autocorrelação*, que se pode definir para cada função $s^{i}(t)$ como

$$\Psi^{i}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^{i}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) . \, s^{i}\left(t + \frac{\tau}{2}\right) dt \tag{1.6}$$

(1) Em geral nos processos físicos pode fazer-se corresponder $[s(t)]^{2}$ a uma potência. Daí resulta que P_{T} àparte um factor terá o significado duma potência média e $W_{T}(f)$ representará portanto uma densidade de potência média, no domínio da frequência, de $-\infty$ a $+\infty$.

O teorema de Wiener-Khintchin afirma que a *média no conjunto* das autocorrelações é a transformada do espectro de potência atrás definido.

$$\Psi(\tau) = \langle \Psi^i(\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, df \tag{1.7}$$

$$W(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \tag{1.8}$$

Nos processos ergódicos, nos quais as médias tomadas ao longo do tempo coincidem com as médias no conjunto, as funções $\Psi^i(\tau)$ são todas iguais: a autocorrelação $\Psi(\tau)$ pode ser calculada a partir duma única função, e o espectro $W(f)$ pode dela ser obtido, através de (1.8), sem implicar uma média no conjunto.

Esta será necessária, porém, na determinação directa (1.5).

1.4. Na análise que vai seguir-se suporemos sempre os processos estacionários e ergódicos, definindo-se portanto a autocorrelação a partir de (1.6), mas suprimindo o índice i por desnecessário (1).

Será, assim,

$$\Psi(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^i\left(t - \frac{\tau}{2}\right) . s^i\left(t + \frac{\tau}{2}\right) dt \tag{1.9}$$

Esta função pode ser definida estatìsticamente, em virtude da ergodicidade admitida,

$$\Psi(\tau) = \langle s^i(t) . s^i(t+\tau) \rangle \tag{1.10}$$

sendo independente do instante t.

2. AS LIMITAÇÕES DAS ESTIMATIVAS DE W (f) E $\Psi(\tau)$

2.1. Do que se disse acima resulta que a determinação do especto de potência a partir de registos cronológicos — nosso objectivo — se encontra limitada naturalmente pela impossibilidade de se dispor de registos de duração ilimitada e de registos em número infinito.

Esta limitação vai acarretar, como veremos, uma dupla imprecisão das nossas estimativas:

— imprecisão devida ao facto de ser impossível colher informações exclusivamente sobre uma dada frequência f

— imprecisão devida ao carácter aleatório que resulta para a estimativa.

2.2. Para ilustrarmos estes factos, consideremos um registo $s^i_T(t)$ contínuo, definido entre os instantes $-\frac{T}{2}$ e $\frac{T}{2}$, (Fig. 2-1) e procedamos ao cálculo do espectro de potência do processo de que $s^i(t)$ faz parte, admitindo que T pode, em princípio, ser tão grande quanto quisermos.

As expressões (1.5) e (1.9) apenas poderão tomar respectivamente a forma

$$W^i_T(f) = \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} s^i_T(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \right|^2 \tag{2.1}$$

$$\Psi^i_T(\tau) = \frac{1}{T-|\tau|} \int_{-(T-|\tau|)/2}^{(T-|\tau|)/2} s^i_T\left(t - \frac{\tau}{2}\right) s^i_T\left(t + \frac{\tau}{2}\right) dt \tag{2.2}$$

---

(1) Este será usado mais adiante, como veremos, para caracterizar determinadas *estimativas* de $\Psi(\tau)$.

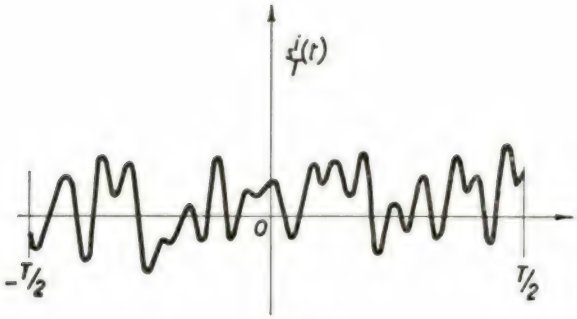


Fig. 2-1

Estas expressões já não se podem obter uma da outra por transformada de Fourier (1), sendo a segunda apenas definida para $|\tau| < T$.

Daqui resulta que se quisermos obter uma estimativa de $W(f)$ através duma estimativa da autocorrelação, há que estender o domínio desta função para além do intervalo $(-T, T)$, a fim de que se lhe possa aplicar o integral de Fourier.

Duas alternativas se nos oferecem:

— ou se estende $s_T^i(t)$ para além do intervalo $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ em que é definida

— ou se estende $\Psi_T^i(\tau)$ para além do seu domínio $(-T, T)$.

2.2.1. *Extensão do domínio de $s_T^i(t)$*

Façamos a extensão definida em (1.2).

A expressão (2.1) não se altera, mas a sua transformada em τ escreve-se

$$\Psi'^i_T(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} s'^i_T\left(t-\frac{\tau}{2}\right) s'^i_T\left(t+\frac{\tau}{2}\right) dt\,, \quad \text{com } \tau\ (-\infty, \infty) \tag{2.3}$$

dela se podendo obter $W_T^i(f)$, segundo a expressão

$$W_T^i(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi'^i_T(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \tag{2.4}$$

O cálculo de $W_T^i(f)$ através de (2.1) afigura-se menos trabalhoso do que (2.4), e será em princípio preferível, a menos que se pretenda obter especìficamente uma estimativa da autocorrelação.

Esta estimativa está relacionada com $\Psi_T^i(\tau)$, (2.2), em virtude de (1.2), tendo-se

$$\Psi'^i_T(\tau) = D_T(\tau)\, \Psi_T^i(\tau) \tag{2.5}$$

em que

$$D_T(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|\tau|}{T} & |\tau| \leqslant T \\ 0 & |\tau| > T \end{cases} \tag{2.6}$$

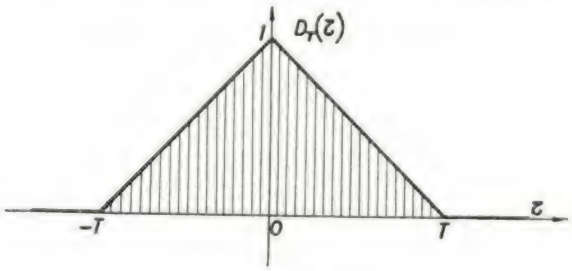


Fig. 2-2

(1) Notar que (2.1) coincide com (1.3), pelo que $\lim_{T\to\infty} < W_T^i(f) > = W(f)$

Também $\lim_{T\to\infty} \Psi_T^i(\tau) = < \Psi_T^i(\tau) > = \Psi(\tau)$

2.2.2. *Extensão do domínio de* $\Psi_T^i(\tau)$

Tomemos a função

$$\Psi''^i_T(\tau) = \begin{cases} \Psi^i_T(\tau) & |\tau| < T \\ 0 & |\tau| > T \end{cases} \tag{2.7}$$

A expressão (2.2) não se altera dentro do intervalo $(-T, T)$, mas passa a anular-se fora dele, vindo a sua transformada em f

$$W''^i_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi''^i_T(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \tag{2.8}$$

que agora não coincide com (2.1).

Estas estimativas (2.1) e (2.8) estão porém relacionadas através dum integral de convolução (1), devido à relação (2.5).

Com efeito, passando esta igualdade para o domínio da frequência e pondo-se

$$Q_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} D_T(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \tag{2.9}$$

resulta finalmente

$$\begin{aligned} W^i_T(f) &= Q_T(f) * W'^i_T(f) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} Q_T(f-f')\, W''^i_T(f')\, df' \end{aligned} \tag{2.10}$$

Esta fórmula relaciona as duas estimativas de W (f) que se obtêm por transformada de Fourier das duas estimativas de $\Psi(\tau)$ provenientes das extensões de domínio referidas.

3. AS "JANELAS". O PROBLEMA DA ESTABILIDADE

3.1. Qualquer dos processos atrás descritos conduz a uma estimativa do espectro de potência que está sujeita a flutuações estatísticas que interessa reduzir na medida do possível.

Evidentemente que esta redução se pode obter efectuando várias estimativas e tomando a sua média aritmética. É de resto a única solução no primeiro dos processos apontados.

O segundo processo porém sugere-nos uma maneira diferente de aumentar a estabilidade da estimativa, por eliminação dos valores calculados de $\Psi^i_T(\tau)$ para os quais a instabilidade é maior.

Trata-se, como é evidente, dos valores correspondentes aos atrasos $|\tau|$ na vizinhança de T. Quer dizer que em vez de anularmos $\Psi^i_T(\tau)$ apenas para $|\tau| > T$, o devemos fazer para $|\tau| > T_m$, com $T_m < T$.

Esta eliminação de elementos, sendo realizada num plano intermédio não é òbviamente aplicável no primeiro processo, em que uma eliminação de dados só se poderá fazer em $s^i_T(t)$, com a correspondente redução de informação à custa de T. E o valor finito de T constitui justamente o inconveniente que os métodos que estamos descrevendo procuram eliminar.

Claro que comparando neste ponto do nosso raciocínio os dois métodos, é de esperar uma certa

---

(1) Convolução entre F (x) e G (x):

$$F(x) * G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)\, G(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)\, G(x-y)\, dy$$

equivalência, uma vez que ao cálculo mais simples pelo processo directo (o 1°) se contrapõe a necessidade da realização de várias estimativas, ao passo que o processo indirecto (o de correlação), envolvendo embora uma transformação de Fourier, pode utilizar apenas uma estimativa, em igualdade de condições de estabilidade, como veremos adiante.

3.2. O processo directo pode considerar-se como consistindo em se multiplicar a função $s^i(t)$ — de que se conhece apenas $s^i_T(t)$ — por uma função $B_o(t)$ assim definida:

$$B_o(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases} \tag{3.1}$$

função esta que se comporta como uma «janela» no domínio do tempo (1). (Fig. 3-1)

Anàlogamente o processo da autocorrelação pode considerar-se como consistindo no produto de $\Psi^i_T(\tau)$ por uma «janela» no domínio dos atrasos (2) $D_o(\tau)$ definida como segue

$$D_o(\tau) = \begin{cases} 1 & |\tau| < T_m = T \\ 0 & |\tau| > T_m = T \end{cases} \tag{3.2}$$

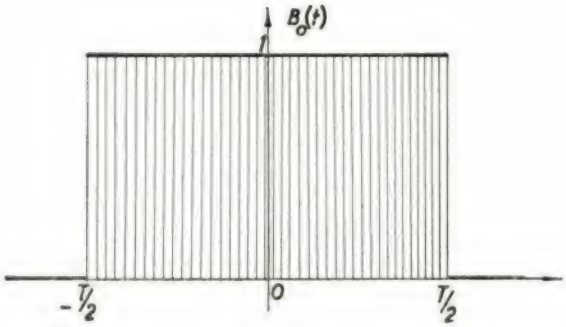


Fig. 3-1

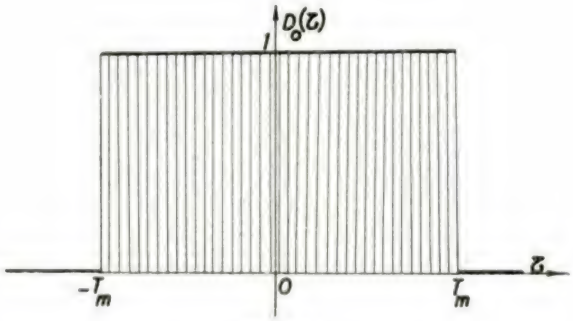


Fig. 3-2

3.3. Podemos agora generalizar estes métodos, considerando em vez das janelas unitárias $B_o(t)$ e $D_o(\tau)$, respectivamente as janelas $B(t)$ e $D(\tau)$, funções pares anulando-se para $|t| > T/2$ e $|\tau| > T_m$,(3) tal como as que acabamos de descrever, mas de resto inteiramente arbitrárias. (Figs. 3-3, 3-4).

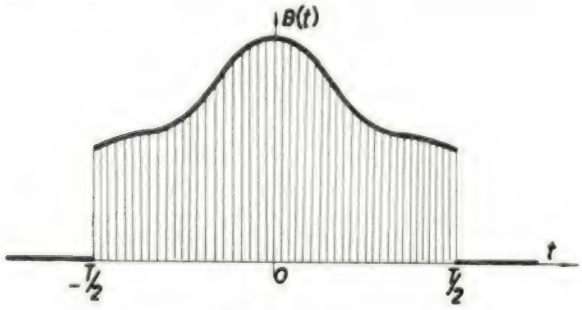


Fig. 3-3

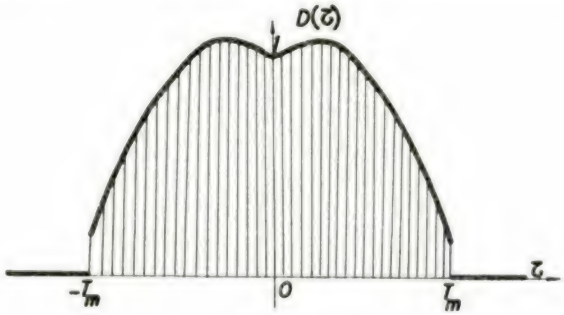


Fig. 3-4

O critério que há-de presidir à sua escolha baseia-se, como veremos, em considerações de simplicidade, estabilidade, precisão e, no caso dos registos discretos, de largura de banda do processo.

(1) Segundo a denominação de Blackman & Tukey: «data window».
(2) idem: «lag window».
(3) $T_m \leqslant T$.

Vamos agora considerar separadamente cada um destes métodos, começando pelo método indirecto.

4. O MÉTODO DA AUTOCORRELAÇÃO

4.1. CASO CONTÍNUO

4.1.1. Seja um registo contínuo de duração T, da função $s^i(t)$ (Fig. 2-1) pertencente a um processo estacionário e ergódico, e efectuemos a estimativa (2.2).

$$\Psi_T^i(\tau) = \frac{1}{T-|\tau|} \int_{-(T-|\tau|)/2}^{(T-|\tau|)/2} s_T^i\left(t-\frac{\tau}{2}\right) s_T^i\left(t+\frac{\tau}{2}\right) dt$$

Multiplicando em seguida $\Psi_T^i(\tau)$ pela janela $D(\tau)$, de largura $2T_m$, como foi indicado, obtemos o valor *corrigido*

$$\Psi^i(\tau) = D(\tau)\,\Psi_T^i(\tau) \qquad \text{(cf 2.4)} \tag{4.1}$$

ao qual aplicamos a transformada de Fourier.

$$\boxed{W^i(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^i(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau} \tag{4.2}$$ (1)

Este valor $W^i(f)$ é, tal como Ψ_T^i e Ψ^i, uma variável aleatória e constitui a nossa *estimativa* do espectro de potência $W(f)$.

Há pois que estudar $W^i(f)$ do ponto de vista estatístico, não só para relacionarmos esta grandeza com o espectro pretendido $W(f)$, mas também para determinarmos as flutuações que a estimativa pode sofrer.

4.1.2. Suponhamos então que era possível efectuar uma estimativa $W^i(f)$ por cada uma das funções $s^i(t)$.

Teríamos, nestas condições,

$$< W^i(f) > = \int_{-\infty}^{\infty} D(\tau) < \Psi_T^i(\tau) > e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau\,,$$

ou seja

$$< W^i(f) > = \int_{-\infty}^{\infty} D(\tau)\,\Psi(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau, \quad \text{com } \tau(-\infty, \infty)$$ (2) $$\tag{4.3}$$

em virtude de o processo ser suposto ergódico [v. (1.10) e nota ao § 2.2.].

A expressão (4.3) representa a transformada do produto $D(\tau)\,\Psi(\tau)$, ambos os factores admitindo transformada (o que não acontecia em (4.1).

---

(1) $W^i(f) = 2\int_0^{\infty} \Psi^i(\tau) \cos 2\pi f\tau\, d\tau$, por ser $\Psi^i(\tau)$ uma função par.

(2) Embora $< \Psi_T^i(\tau) >$ seja definido só para $|\tau| < T$, o factor $D(\tau)$ permite estender τ a todo o domínio.

Teremos então

$$\boxed{< W^i(f) > = Q(f) * W(f)} \tag{4.4}$$

ou seja

$$< W^i(f_1) > = \int_{-\infty}^{\infty} Q(f_1 - f)\, W(f)\, df \tag{4.5}$$

em que

$$Q(f) = \int_{-\infty}^{\infty} D(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \tag{4.6}$$

A expressão (4.5) mostra-nos que a média das estimativas de W (f) relativas a uma dada frequência f_1 não coincide exactamente com $W(f_1)$, mas resulta pelo contrário da contribuição de outras frequências, através da «janela espectral» Q (f).

Esta contribuição será tanto menor quanto mais «aguçada» for a forma de Q (f) (Fig. 4-1). Em particular, seria

$$< W^i(f_1) > = W(f_1) \quad \text{para} \quad Q(f) = \delta(f)$$

Claro que esta hipótese nunca se verifica, dada a circunstância de D (τ) ter uma duração limitada.

Estes factos implicam a existência de *imprecisão* na estimativa (como já enunciáramos no § 2.1) no sentido em que aquilo que se calcula, mesmo em valor médio, diz respeito não só à frequência pretendida, mas também a outras.

4.1.3. *Resolução*

Tem mais interesse para o projecto o conceito de *resolução* no domínio da frequência, consequência imediata da referida imprecisão, e que se pode medir pelo afastamento mínimo Δf de duas determinações $W^i(f_1)$, $W^i(f_1 + \Delta f)$, que não conduza a uma sobreposição apreciável das frequências em jogo nas duas estimativas.

Para definir Δf, lembremo-nos que as estimativas $W^i(f)$ têm transformada no domínio de τ de duração limitada ($|\tau| < T_m$), bastando portanto conhecê-las nas frequências múltiplas de $\frac{1}{2\,T_m}$ (teorema do *sampling*), pois ficarão assim completamente definidas.

Dado que porém as janelas Q (f) habituais introduzem para esta separação forte sobreposição de duas estimativas contíguas, será preferível tomarmos como relativamente independentes as estimativas correspondentes a uma separação dupla (fig. 4-2).

Será pois este valor

$$\Delta f = \frac{1}{T_m} \tag{4.7}$$

que definiremos como *resolução*.

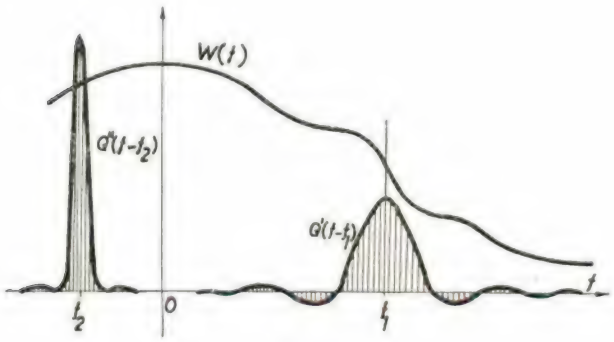


Fig. 4-1

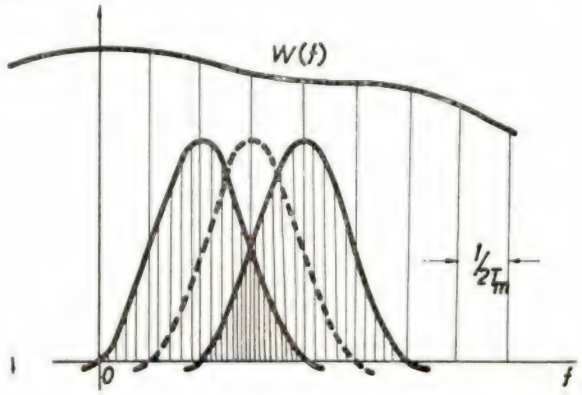


Fig. 4-2

SOLDADURA A ARCO

em atmosfera de Argon

PROCESSO

NERTAL

Processo que permite soldar com facilidade:

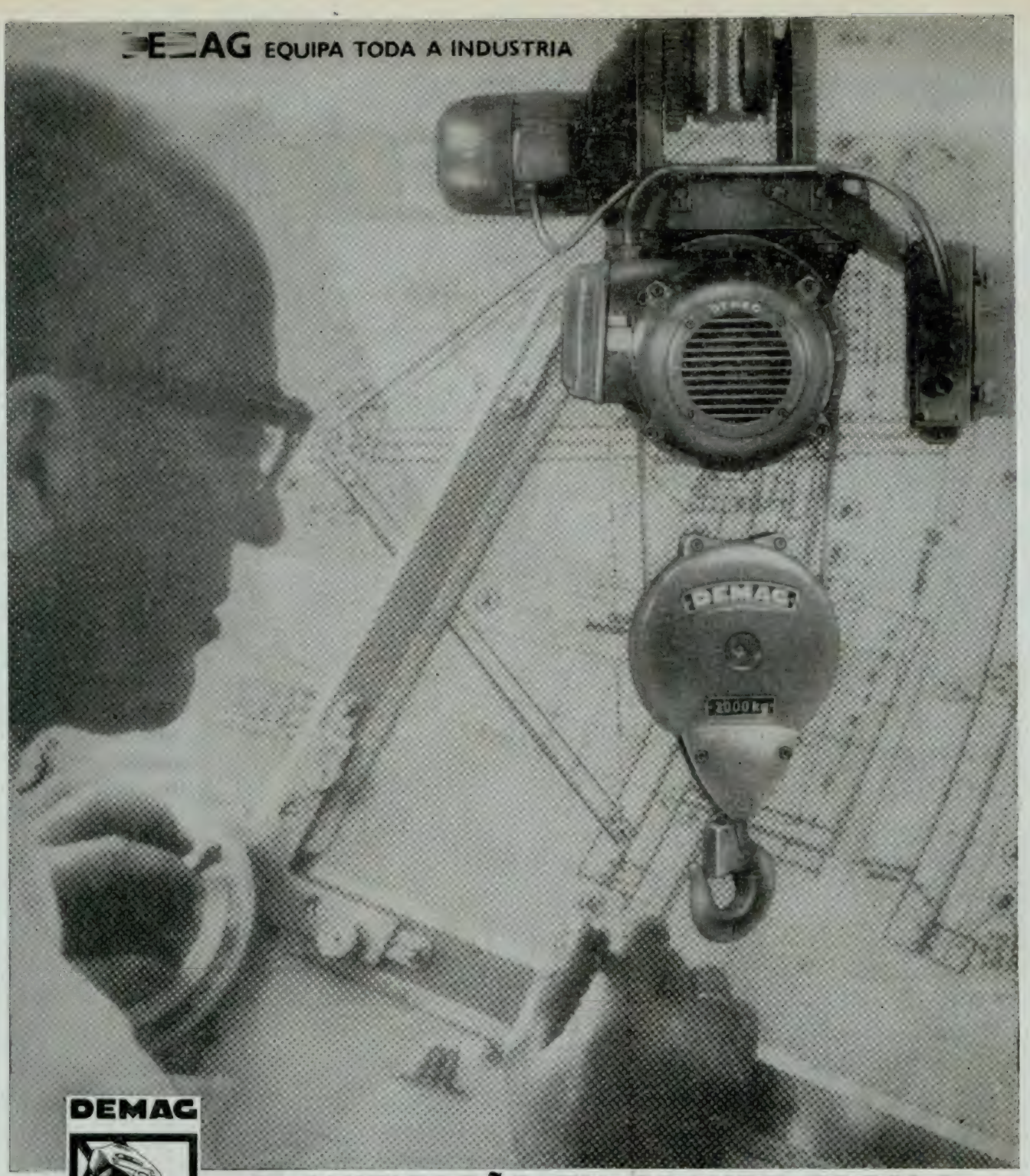
ALUMÍNIO
AÇO INOXIDÁVEL
COBRE
BRONZE
LATÃO
ETC.

CONSULTE A

SOCIEDADE PORTUGUESA DO AR LIQUIDO

LISBOA PORTO

Depósitos em Lisboa, Porto, Funchal, Coimbra, Setúbal e Ponta Delgada



DEMAG

Aparelhos de elevação DEMAG

PLANIFICAÇÃO EM GRANDE ESCALA

A manutenção representa dispêndio de tempo, de dinheiro e de mão de obra. Em determinados casos as despesas de manutenção são factor decisivo na luta com a concorrência. Daí a necessidade imperiosa de reduzir as despesas de manutenção.

Os diferenciais "DEMAG" correspondem inteiramente às necessidades de altura de elevação, de segurança e de velocidade. Graças à experiência adquirida em dezenas de anos obteve-se uma construção moderna e robusta.

Há sempre a possibilidade de novas e interessantes aplicações, das quais resulta o aumento sensível do rendimento das Empresas.

Para vos dar uma ideia mais precisa da utilidade dos diferenciais "DEMAG" os nossos técnicos encontram-se sempre à vossa disposição.

Não desperdice o seu tempo — consulte-nos.

O seu sucesso será também o nosso.

ROMAR
UMA ORGANIZAÇÃO AO SERVIÇO DA INDUSTRIA

LISBOA
Rua da Boa Vista, 81-C - 83-E
Tel. PPC 67 21 61/2/3/4/5

PORTO
Rua Sá da Bandeira, 589
Tel. 2 58 71

LOURENÇO MARQUES
Av. Manuel de Arriaga, 55-1.º
Tel. 5214

LUANDA
Largo da República, 29
Tel. 4492

4.1.4. *Alguns tipos de janelas D (τ), Q (f)*

$$(a)\begin{cases} D_o(\tau) \overset{(1)}{=} \begin{cases} 1 & |\tau| < T_m \\ 0 & |\tau| > T_m \end{cases} & (4.8) \\ Q_o(f) = \dfrac{\text{sen } 2\pi f T_m}{\pi f} = 2\,T_m \left(\dfrac{\text{sen } 2\pi f T_m}{2\pi f T_m}\right) & (4.9) \end{cases}$$

Estas janelas, com $T_m = T$ correspondem à atitude simplista descrita no § 2.2.2 [cf. (3.2)]. Vemos (Fig. 4-3) como os lobos laterais apresentam amplitudes apreciáveis ($\simeq 20\,\%$ do lobo principal).

$$(b)\begin{cases} D_1(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|\tau|}{T_m} & |\tau| < T_m \\ 0 & |\tau| > T_m \end{cases} & (4.10) \\ Q_1(f) = T_m \cdot \left(\dfrac{\text{sen } \pi f T_m}{\pi f T_m}\right)^2 & (4.11) \end{cases}$$

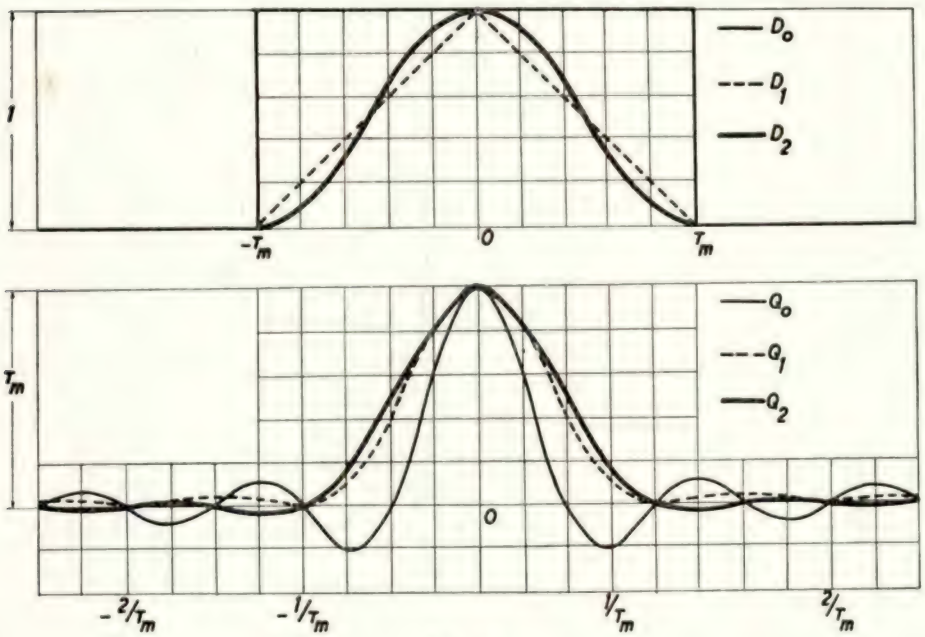


Fig. 4-3

Estas janelas, com $T_m = T$ correspondem à atitude descrita no § 2.2.1 [cf. (2.6)] (2).
Q_1 (f) apresenta lobos laterais menos acentuados que Q_o (l), mas tem o lobo principal mais largo.

$$(c)\begin{cases} D_2(\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(1 + \cos\dfrac{\pi\tau}{T_m}\right) & |\tau| < T_m \\ 0 & |\tau| > T_m \end{cases} & (4.12) \\ Q_2(f) = \dfrac{1}{2}\,Q_o(f) + \dfrac{1}{4}\,Q_o\left(f + \dfrac{1}{2\,T_m}\right) + \dfrac{1}{4}\,Q_o\left(f - \dfrac{1}{2\,T_m}\right) & (4.13) \end{cases}$$

---

(1) O valor de $D_o(\tau)$ para $\tau = \pm T_m$ não intervém em Q_o (f) após a integração. Pode portanto ser qualquer finito. Notemos porém que quando $D_o(\tau)$ se obtém de Q_o (f), fica definido em $\tau = \pm T_m$, com o valor 1/2.

(2) $D_1(\tau)$ equivale a B_o (t), (3.1), quando $T_m = T$. Trataremos desta equivalência no método directo.

Estas janelas, denominadas *Hanning*, apresentam lobos laterais mais baixos ($\simeq 2\,\%$ do principal) e mais estreitos, podendo estas características acentuar-se ainda mais à custa duma maior complexidade das janelas usadas.

Dum modo geral podemos dizer que Q_2 (f) representa um bom compromisso entre a necessidade de estreitar o lobo principal (o que exige D (τ) com andamento semelhante a D_0) e a necessidade de diminuir os lobos laterais, a fim de obviar a um possível acidentado do espectro (o que exige D (τ) variando gradualmente).

4.1.5. *Estabilidade*

A estabilidade das estimativas pode medir-se pela sua *dispersão relativa* $\Delta\sigma$, que se define como sendo o quociente entre o desvio quadrático médio de W^i (f) (variância) e o quadrado do valor médio.

Estas médias são evidentemente tomadas no conjunto.

Assim

$$\Delta\sigma = \frac{\mathrm{var}\,\{W^i(f_1)\}}{\langle W^i(f_1)\rangle^2} \tag{4.14}$$

Pode-se fazer uma ideia aproximada da distribuição das estimativas, comparando-a com uma *distribuição em* χ^2 com k graus de liberdade, que apresenta a mesma variância e a mesma média. Como para estas distribuições se tem

$$k\,\Delta\sigma = 2, \tag{4.15}$$

conclui-se que podemos descrever a estabilidade através deste número k.

Um conceito equivalente e certamente mais sugestivo é o de *dispersão* D_p — em decibels — correspondente a uma dada fracção p da distribuição, e que pode ser obtida de tabelas das distribuições em χ^2.

Por exemplo, as tabelas mostram que com $k = 4$ e $p = 80\,\%$ se tem $D_p = 10$ db.

Quer dizer que neste caso a probabilidade de que uma estimativa esteja compreendida numa faixa de imprecisão, de 10 db entre valores extremos, é de 80 % (1).

Existem expressões simples que dão a relação entre k e D_p de modo aproximado.

Assim pode escrever-se

$$k \simeq 1 + \frac{A}{D_p^2} \tag{4.16}$$

tendo-se

QUADRO I

p %	40	60	80	90	96	98
A	35	100	250	400	625	840

4.1.6. O cálculo de $\Delta\sigma$ pode fazer-se na hipótese de s^i (t) ter distribuição gaussiana.

Blackman & Tukey (2) mostram que se podem obter, nesta hipótese, os seguintes resultados:

$$\Delta\sigma(f_1) = \frac{\displaystyle\iint_{-\infty}^{\infty} [Q(f-f_1) + Q(f+f_1)]^2\, W(f+f')\, W(f-f') \left(\frac{\mathrm{sen}\, 2\pi f' T'}{2\pi f' T'}\right)^2 df\, df'}{\left[\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} Q(f-f_1)\, W(f)\, df\right]^2} \tag{4.17}$$

sendo $\quad T' = T - \alpha\, T_m$ (3). $\quad$ (4.18)

(1) O valor médio fica mais próximo do extremo superior, tanto mais quanto menor for k.

(2) Ref [1] — pág. 16 e seguintes.
pág. 100 e seguintes.

(3) α é um factor introduzido com o fim de tornar viável o cálculo de var $\{W^i(f)\}$, o qual desperdiça alguns dados na determinação de $\Psi^i_T(\tau)$, e cujo valor indicado pela prática anda à volta de 1/3.

No caso de se usarem p registos de duração T_k, para cada um dos quais se calcula W^i (f), e de que se toma depois a média aritmética, dever-se-á pôr na fórmula anterior

$$T' = p\ (T_k - \alpha\ T_m) = T - p\ \alpha\ T_m \tag{4.19}$$

A expressão (4.17) é pouco prática, devido à sua complexidade, mas é susceptível de se simplificar consideràvelmente, em dois casos:

— Se o espectro W (f) variar lentamente, na vizinhança $|1/T'|$ da frequência f_1, tem-se aproximadamente, para as janelas Q (f) habituais,

$$\Delta\sigma\ (f_1) \simeq \frac{T_m}{T'} \tag{4.20}$$

para $f_1 > \frac{1}{T_m}$, crescendo este valor à medida que f_1 diminui, até atingir o dobro para $f = 0$

Falando em termos de graus de liberdade, será (v. 4.15) para este caso

$$\begin{aligned} k &= \frac{2\,T'}{T_m} \qquad f_1 > \frac{1}{T_m} \\ k &\to \frac{T'}{T_m} \qquad f_1 \to 0 \end{aligned} \tag{4.21}$$

— Se W (f) for constituído exclusivamente por um pico de potência na frequência f_o (e em $-f_o$, claro), de largura pequena comparada com $\frac{1}{T'}$, mostra-se que se tem neste caso

$$\Delta\sigma = 1, \quad \text{ou seja } k = 2, \quad \text{para qualquer frequência } f_1.$$

Este resultado verifica-se para $W(f) = A\ [\delta\ (f - f_o) + \delta\ (f + f_o\ ]$, o que constitui um caso extremo.

Na realidade a existência dum pico sobreposto a um espectro acarreta uma dispersão relativa $\Delta\sigma$ igual à unidade apenas na zona em que as janelas $Q\,(f_1 \pm f_o)$ tomam valores apreciáveis; isto é, $\Delta\sigma = 1$ na região do pico, mas tende para $\frac{T_m}{T'}$ à medida que nos afastamos deste e nos aproximamos de zonas onde W(f) varie de modo mais gradual.

4.1.7. Vemos assim que a estabilidade se opõe em parte à resolução.

Para baixarmos esta há que aumentar o atraso máximo T_m. Este aumento, se não actuarmos na duração T, irá por sua vez aumentar a dispersão.

É curioso notar como estes conceitos obedecem a relações de compromisso, do tipo das relações de incerteza da Física.

Com efeito, e atendendo a que para k suficientemente grande é $T' \simeq T$, podemos sintetizar os resultados anteriores sob a forma

$$\boxed{\Delta f\ .\ \Delta\sigma \simeq \frac{1}{T}} \tag{4.22}$$

em que $\frac{1}{T}$ é uma constante para *cada registo.*

4.2 CASO DISCRETO

4.2.1. Suponhamos agora que dispomos de $n + 1$ dados, igualmente espaçados de Δt, e que podem ser provenientes duma amostragem *(sampling)* efectuada sobre um registo contínuo (Fig. 4-4).

Tal como no caso contínuo, começamos por determinar um valor médio (no tempo) dos produtos cruzados

$$s_T^i\left(t-\frac{\tau}{2}\right) s_T^i\left(t+\frac{\tau}{2}\right) \tag{4.23}$$

Para maior simplicidade vamos dispor os valores conhecidos de $s_T^i(t)$ a partir de $t=0$, tendo-se assim o conjunto de valores $s_T^i(q\Delta t)$, com $q=0,1,2,\ldots n$.

As nossas estimativas $\Psi_T^i(\tau)$ tomarão agora a forma

$$\Psi_T^i(r\Delta t)=\begin{cases} \dfrac{1}{n+1-r}\displaystyle\sum_{q=o}^{n-r} s_T^i(q\Delta t)\, s_T^i(q\Delta t+r\Delta t) & r=0,1,2\ldots n^{(1)} \\[2ex] \dfrac{1}{n+1+r}\displaystyle\sum_{q=-r}^{n} s_T^i(q\Delta t)\, s_T^i(q\Delta t+r\Delta t) & r=0,-1,-2\ldots -n \end{cases} \tag{4.24}$$

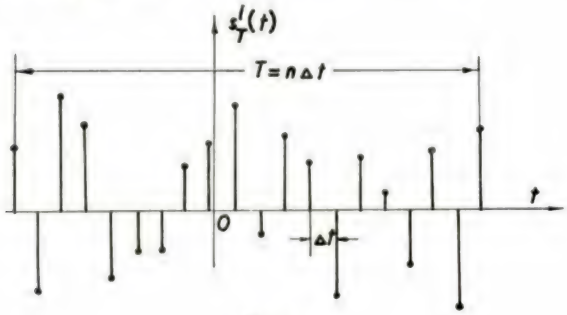


Fig. 4-4

sendo portanto $\Psi_T^i(r\Delta t)$ uma função par como o era $\Psi_T^i(\tau)$, mas constituindo uma sucessão de valores discretos, igualmente espaçados de Δt.

4.2.2. Multipliquemos estas quantidades pelas janelas $D(\tau)$, de largura $2m\Delta t$, sendo $m<n$. Obtemos assim as estimativas *corrigidas*

$$\Psi^i(r\Delta t) = D(\tau)\,\Psi_T^i(r\Delta t) \tag{4.25}$$

O passo seguinte seria achar a transformada de Fourier desta função. No caso presente porém estamos a tratar com funções que só não são nulas em intervalos de medida nula, pelo que vamos multiplicar os valores anteriores por funções δ afectadas de coeficientes adequados.

Obtemos assim

$$\tilde{\Psi}^i(\tau) = \Delta t\left[\frac{1}{2}\Psi^i(-m\Delta t)\,\delta(\tau+m\Delta t)+\sum_{r=-(m-1)}^{m-1}\Psi^i(r\Delta t)\,\delta(\tau-r\Delta t)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\Psi^i(+m\Delta t)\,\delta(\tau-m\Delta t)\right] \tag{4.26}$$

Finalmente, passando para o domínio da frequência, vem

$$W^i(f)=\Delta t\left[\Psi^i(0)+2\sum_{q=1}^{m-1}\Psi^i(q\Delta t)\cos 2\pi f q\Delta t+\Psi^i(m\Delta t)\cos 2\pi f m\Delta t\right] \tag{4.27}$$

4.2.3. Anàlogamente ao que foi feito no caso contínuo, vamos determinar a média de conjunto destas estimativas.

(1) Embora estas expressões sejam definidas para $|r|\leqslant n$, apenas interessa usar valores de r positivos (Ψ_T^i é par) desde 0 até m, em virtude de (4.25).

Se fizermos

$$\nabla(\tau, \Delta t) = \Delta t \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - q\Delta t) \tag{4.28}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}^i(\tau) &= \nabla(\tau, \Delta t)\, D_o(\tau)\, D(\tau)\, \Psi_T^i(r\Delta t) \\ &= \nabla(\tau, \Delta t)\, D(\tau)\, \Psi_T^i(r\Delta t) \end{aligned} \tag{4.29}$$

em que se fez $D_o(\pm m\Delta t) = \frac{1}{2}$ e $D(\pm m\Delta t) = 0$

Tomando as médias de conjunto em (4.29) obtemos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Psi}^i(\tau) \rangle &= \nabla(\tau, \Delta t)\, D(\tau)\, \Psi(r\Delta t) \\ &= \nabla(\tau, \Delta t)\, D(\tau)\, \Psi(\tau) \end{aligned} \tag{4.30}$$

Passando para o domínio da frequência, resulta

$$\langle W^i(f) \rangle = A\left(f, \frac{1}{\Delta t}\right) * Q(f) * W(f) \tag{4.31}$$

em que

$$A\left(f, \frac{1}{\Delta t}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \nabla(\tau, \Delta t)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{q}{\Delta t}\right) \tag{4.32}$$

Podemos escrever (4.31) de duas maneiras diferentes :

— Fazendo $A\left(f, \frac{1}{\Delta t}\right) * W(f) = W_a(f) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} W\left(f - \frac{q}{\Delta t}\right)$, temos

$$\boxed{\langle W^i(f) \rangle = Q(f) * W_a(f)} \tag{4.33}$$

— Fazendo $A\left(f, \frac{1}{\Delta t}\right) * Q(f) = Q_a(f) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} Q\left(f - \frac{q}{\Delta t}\right)$, temos

$$\boxed{\langle W^i(f) \rangle = Q_a(f) * W(f)} \tag{4.34}$$

A expressão (4.33) aparece-nos como a convolução entre a janela $Q(f)$ e um espectro periódico $W_a(f)$ resultante duma sobreposição de frequências do espectro a analisar $W(f)$.

A expressão (4.34) pelo contrário aparece-nos como a convolução entre o espectro pretendido $W(f)$ e a janela periódica $Q_a(f)$ resultante da repetição (com sobreposição) de $Q(f)$.

Se $W(f)$ for limitado à frequência $\frac{1}{2\Delta t}$, $W_a(f)$ coincidirá com $W(f)$ dentro do intervalo $|f| < \frac{1}{2\Delta t}$, e a média $\langle W^i(f) \rangle$ é na maior parte deste intervalo muito aproximadamente igual a $Q(f) * W(f)$. Apenas nos extremos os lobos de $Q(f)$ poderão captar contribuições das frequências de $W_a(f)$ superiores (em módulo) a $\frac{1}{2\Delta t}$.

$Q_a(f)$ por seu turno só contém um ramo dentro do mesmo intervalo, (excepção feita aos valores extremos), coincidindo aproximadamente dentro dele com $Q(f)$.

No caso porém de o espectro $W(f)$ não ser limitado à frequência $\frac{1}{2\Delta t}$, dá-se uma sobreposição de frequências que pode ser muito importante, desvirtuando mais ou menos profundamente a estimativa.

Este facto, denominado *aliasing* por Blackman & Tukey, será estudado em pormenor, mais adiante.

4.2.4. *Estabilidade*

O cálculo da variância das estimativas, supondo o ruído gaussiano fornece o seguinte resultado

$$\Delta\sigma(f_1) = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} [Q_a(f-f_1) + Q_a(f+f_1)]^2 W(f+f') W(f-f') \left(\frac{\operatorname{sen} 2\pi f' n' \Delta t}{n' \operatorname{sen} 2\pi f' \Delta t}\right)^2 df\, df'}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} Q_a(f-f_1) W(f)\, df\right]^2} \tag{4.35}$$

sendo $n' =$ maior inteiro de $\left(n - \frac{m}{3}\right)$

A expressão (4.35) é susceptível de se simplificar, tal como a sua congénere (4.17), obtendo-se para o número de graus de liberdade k:

— Espectro $W(f)$ pouco acidentado à escala de $\frac{1}{n\Delta t}$

$$k = 2\left(\frac{n}{m} - \frac{1}{3}\right) \quad r = 1,2 \ldots m-1$$

$$k = \left(\frac{n}{m} - \frac{1}{3}\right) \quad r = 0, m \tag{4.36}$$

— Espectro $W(f)$ constituído por um pico

$$k = 2$$

No caso de se realizarem p estimativas, de que se toma a média, há que multiplicar por p os valores anteriores.

4.2.5. Tal como no caso contínuo, apenas nos interessa calcular $W^i(f)$ nas frequências

$$f = \frac{r}{2T_m} = \frac{r}{2m\Delta t}$$

Assim, teremos

$$W^i\left(\frac{r}{2m\Delta t}\right) = \Delta t\left[\Psi^i(0) + 2\sum_{q=1}^{m-1} \Psi^i(q\Delta t)\cos\frac{qr\pi}{m} + \Psi^i(m\Delta t)\cos r\pi\right]^{(1)} \tag{4.37}$$

Esta restrição do domínio de f ao conjunto discreto dos valores $\frac{r}{2m\Delta t}$ vai permitir-nos um cálculo simples de $W^i\left(\frac{r}{2m\Delta t}\right)$ a partir de $\Psi^i_T(r\Delta t)$.

Para isso calculemos $W^i\left(\frac{r}{2m\Delta t}\right)$ usando $D(\tau) = D_0(\tau)$.

(1) Notar que $W^i(f)$ é uma função periódica de período $\frac{1}{\Delta t}$ e simétrica em relação às frequências $\frac{r}{2\Delta t}$.

Será

$$W_o^i\left(\frac{r}{2\,m\,\Delta t}\right) = \Delta t\left[\Psi_T^i(0) + 2\sum_{q=1}^{m-1}\Psi_T^i(q\,\Delta t)\cos\frac{q\,r\,\pi}{m} + \Psi_T^i(m\,\Delta t)\cos r\,\pi\right] \tag{4.38}$$

pois $\Psi_o^i(q\,\Delta t)$ coincide com $\Psi_T^i(q\,\Delta t)$ dentro do intervalo $m\,\Delta t$.

Como $D(\tau)\,D_o(\tau) = D(\tau)$, tem-se

$$\Psi^i(r\,\Delta t) = \Psi_o^i(r\,\Delta t)\,D(\tau)$$

$$\tilde{\Psi}^i(r\,\Delta t) = \tilde{\Psi}_o^i(r\,\Delta t)\,D(\tau)$$

e finalmente, no domínio de f,

$$W^i(f) = W_o^i(f) * Q(f) \tag{4.39}$$

Esta expressão, quando utilizada para os valores $f = \frac{r}{2\,m\,\Delta t}$, conduz a uma relação muito simples, no caso das janelas $D_2(\tau)$, obtendo-se

$$\begin{cases} W_2^i(0) = \frac{1}{2}W_o^i(0) + \frac{1}{2}W_o^i\left(\frac{1}{2\,m\,\Delta t}\right) \\ W_2^i\left(\frac{r}{2\,m\,\Delta t}\right) = \frac{1}{4}W_o^i\left(\frac{r-1}{2\,m\,\Delta t}\right) + \frac{1}{2}W_o^i\left(\frac{r}{2\,m\,\Delta t}\right) + \frac{1}{4}W_o^i\left(\frac{r+1}{2\,m\,\Delta t}\right) \\ \qquad\qquad r = 1.2\ldots\ldots m-1 \\ W_2^i\left(\frac{1}{2\Delta t}\right) = \frac{1}{2}W_o^i\left(\frac{m-1}{2\,m\,\Delta t}\right) + \frac{1}{2}W_o^i\left(\frac{1}{2\,\Delta t}\right) \end{cases} \tag{4.40}$$

resultando para outras janelas expressões formalmente semelhantes.

Torna-se portanto muito mais fácil calcular $W_o^i\left(\frac{r}{2\,m\,\Delta t}\right)$ e passar depois para $W^i\left(\frac{r}{2\,m\,\Delta t}\right)$ segundo as fórmulas anteriores, do que proceder como no caso contínuo, em que se modifica primeiro a estimativa da autocorrelação e só depois se aplica a transformada de Fourier.

4.2.6. A resolução é definida como no caso contínuo, tendo em vista a independência das estimativas, resultando

$$\Delta f = \frac{1}{m\,\Delta t} \tag{4.41}$$

(embora se calculem os pontos $r/2\,m\,\Delta t$ necessários para definir completamente $W^i(f)$ como já frisámos).

4.3 ORGANIZAÇÃO DO CÁLCULO DO ESPECTRO DE POTÊNCIA

Temos agora todos os elementos para organizar um projecto de cálculo de $W(f)$, dentro das hipóteses em que a análise estatística feita é válida, isto é, no caso dos processos ergódicos, de distribuição gaussiana.

Este projecto, ou melhor, este esboço de projecto será elaborado de acordo com as exigências de resolução, estabilidade, duração viável dos registos e ainda largura de banda do processo, no caso discreto.

E dizemos *esboço de projecto* porque, como veremos, há um certo número de correcções a fazer em diferentes alturas da estimativa, correcções essas que são necessárias para obviar à natureza por vezes acidentada do espectro e ao inconveniente espaçamento dos dados.

Assim, e antes de passarmos a estas correcções, podemos estabelecer o projecto da seguinte forma:

4.3.1. *Caso contínuo*

Fixemos a resolução Δf e a dispersão D_p
De (4.7) tira-se

$$\boxed{T_m = \frac{1}{\Delta f}}$$

De (4.16) e do quadro I obtém-se o valor de k

$$\boxed{k = 1 + \frac{A}{D_p^2}}$$

Admitindo que W (f) não tem variação muito rápida (veremos a correcção adequada mais adiante), tem-se, de (4.21)

$$\boxed{T' = \frac{k}{2} T_m}$$

Se este valor T' não for demasiado grande para as possibilidades de registo podemos tomar um único registo, vindo então

$$\boxed{p = 1} \qquad \boxed{T_k = T = T' + \frac{T_m}{3}}\text{, de (4.19)}$$

No caso contrário arbitrar-se-á *p*, obtendo-se para duração de cada registo

$$\boxed{T_k = \frac{T'}{p} + \frac{T_m}{3}}\,.$$

Notar porém que, por ser $T_m < T_k$ se deverá ter

$$\boxed{p < \frac{3k}{4}}$$

Além disso, o uso de T' em vez de T só tem sentido quando $T_m << T_k$.

4.3.2. *Caso discreto*

Supondo o processo de frequência limitada F (o caso contrário será também visto mais tarde), e fixando como no caso anterior Δf e D_p, raciocinaremos como segue:

Como vimos no § 4.2.3, convirá ser $F = \frac{1}{2\Delta t}$, donde

$$\boxed{\Delta t = \frac{1}{2F}}$$

A seguir, de (4.41) conclui-se ser

$$\boxed{m = \frac{1}{\Delta t\, \Delta f}}$$

NO ORÇAMENTO DUMA EMPREITADA

A CERTEZA DE

TEMPOS REDUZIDOS DE PARAGEM

POR AVARIA DAS MÁQUINAS

PERMITE-LHE CONSIDERAR CUSTOS MAIS BAIXOS

o equipamento

CATERPILLAR*

garante-lhe um máximo tempo de serviço activo

STET

SOCIEDADE TÉCNICA DE EQUIPAMENTOS E TRACTORES, LDA.

SEDE PROVISÓRIA: AV. DE MADRID, 3-B – LISBOA 1 – TELEFS.: 72 40 53 (PPC A), 710620 – TELEGS.: STETRA

*«CATERPILLAR» E «TRAXCAVATOR» SÃO MARCAS REGISTADAS DE CATERPILLAR TRACTOR CO.

CATERPILLAR*

apresenta

OS NOVOS MOTO-SCRAPERS

619, 630 e 631

EQUIPADOS COM CAIXA DE VELOCIDADES SERVO-COMANDADA SISTEMA "POWER SHIFT"

	POTÊNCIA	CAPACIDADE
619	280 HP	14 m3
630	420 HP	27 m3
631	420 HP	27 m3

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO EM PORTUGAL CONTINENTAL, ILHAS AJACENTES, CABO VERDE E GUINÉ

STET

SOCIEDADE TÉCNICA DE EQUIPAMENTOS E TRACTORES, L.DA

SEDE PROVISÓRIA AV. DE MADRID, 3-B-LISBOA 1

TELEFS. 72 40 53 (PPC/A)-71 06 20—TELEG. «STETRA»

*«CATERPILLAR» E «CAT» SÃO MARCAS REGISTADAS DE CATERPILLAR TRACTOR, CO. - PEORIA, ILLINOIS - E. U. A.

Fazendo intervir (4.36), vem

$$\boxed{n' = \frac{k}{2} m}$$

Anàlogamente se arbitra o número de registos

$$\boxed{p < \frac{3k}{4}}$$

pelo que

$$\boxed{T_k = \left(\frac{k}{2p} + \frac{1}{3}\right) m \Delta t = n \Delta t}$$

sendo $n + 1$ o número de *pontos* por registo.

De posse de todos os elementos dos §§ 4.3.1 e 4.3.2, não temos mais que efectuar a estimativa ou estimativas, de acordo com o § 4.1.1 e com o § 4.2.1 e seguintes.

No caso de se utilizarem p registos, convém efectuar p estimativas da autocorrelação Ψ^i, e com o valor médio obtido calcular W^i.

O resultado é evidentemente o mesmo que se obtém se determinarmos uma estimativa de W^i por registo e efectuarmos a média no fim (em virtude do carácter linear da relação que liga Ψ^i a W^i) mas aquele procedimento tem a vantagem de poupar operações.

5. O MÉTODO DIRECTO

5.1 CASO CONTÍNUO

5.1.1. Como foi indicado (§§ 2.2.1 e 3.3) multipliquemos agora $s_T^i(t)$ por uma janela $B(t)$, função par, e que se anula para $|t| > T/2$; e efectuemos a estimativa [c f. (2.1)]

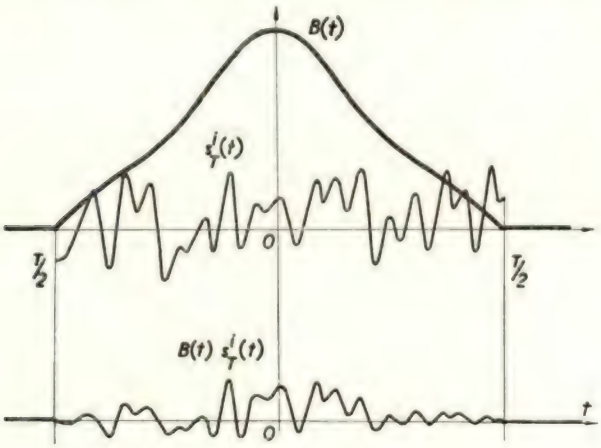


Fig. 5-1

$$W^i(f) = \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} B(t)\, s_T^i(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \right|^2 \tag{5.1}$$

que se pode escrever

$$W^i(f) = \frac{1}{T}\left|\int_{-\infty}^{\infty} B(t)\, s_T^i(t)\, \epsilon^{-j2\pi ft}\, dt\right|^2$$

5.1.2. A fim de tomarmos a média de conjunto destas estimativas — provenientes do conjunto das funções $s^i(t)$ — é conveniente servirmo-nos da autocorrelação associada [cf. (2.3)]

$$\Psi^i(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} B\left(t-\frac{\tau}{2}\right) s^i\left(t-\frac{\tau}{2}\right) B\left(t+\frac{\tau}{2}\right) s^i\left(t+\frac{\tau}{2}\right) dt \tag{5.2}$$

que está relacionada com $W^i(f)$ através da transformada de Fourier.

Teremos

$$<\Psi^i(\tau)> = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} <s^i\left(t-\frac{\tau}{2}\right) s^i\left(t+\frac{\tau}{2}\right)> B\left(t-\frac{\tau}{2}\right) B\left(t+\frac{\tau}{2}\right) dt \tag{5.3}$$

ou ainda

$$<\Psi^i(\tau)> = D_e(\tau)\,\Psi(\tau) \tag{5.4}$$

em que

$$D_e(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} B\left(t-\frac{\tau}{2}\right) B\left(t+\frac{\tau}{2}\right) dt \tag{5.5}$$

$D_e(\tau)$ é uma janela equivalente no domínio dos atrasos — no que respeita valores médios, note-se — e que se anula para $|\tau| > T$. Por isso a relação (5.4) é válida em todo o domínio de τ.

Passando, como sempre, para o domínio da frequência, de (5.4) obtém-se

$$\boxed{<W^i(f)> = Q_e(f) * W(f)} \tag{5.6}$$

em que $Q_e(f)$, *janela espectral* equivalente (para determinação de médias) é dada por

$$Q_e(f) = \int_{-\infty}^{\infty} D_e(\tau)\, \epsilon^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \tag{5.7}$$

É curioso notar que as expressões (5.5) e (5.7) são formalmente análogas a (2.3) e (2.4). É de esperar portanto uma relação correspondente a (2.5).

Será a seguinte

$$Q_e(f) = \frac{1}{T}\left|\int_{-\infty}^{\infty} B(t)\, \epsilon^{-j2\pi ft}\, dt\right|^2 = \frac{1}{T}\,|J(f)|^2 \tag{5.8}$$ (1)

sendo

$$J(f) = \int_{-\infty}^{\infty} B(t)\, \epsilon^{-j2\pi ft}\, dt \tag{5.9}$$

---

(1) É indiferente usarmos como limites de integração $\pm\infty$ ou $\pm T/2$, em virtude do carácter limitado do domínio de $B(t)$.

5.1.3. *Estabilidade*

O cálculo da variância das determinações $W^i(f)$ conduz (1), no caso gaussiano, ao seguinte resultado

$$\mathrm{var}\{W^i(f_1)\} = \langle W^i(f_1)\rangle^2 + \frac{1}{T^2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} |J(f-f_1)\,J(f+f_1)|\,W(f)\,df\right]^2 \tag{5.10}$$

Resulta assim para a dispersão relativa $\Delta\sigma$

$$\Delta\sigma(f_1) = 1 + \frac{1}{T^2}\left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} |J(f-f_1)\,J(f+f_1)|\,W(f)\,df}{\langle W^i(f_1)\rangle}\right]^2 \tag{5.11}$$

Vemos que se tem $\Delta\sigma(f_1) \geqslant 1$, *para cada estimativa*, qualquer que seja a duração T do registo.

Pode ver-se que, para janelas B (t) do tipo D (τ), a expressão (5.11) conduz a um valor de $\Delta\sigma$ que é aproximadamente igual à unidade, para W (f) de andamento gradual, e igual a 2, para $f_1 = 0$.

A escolha de B (t) depende principalmente dos requisitos de precisão.

Com efeito é de esperar que B (t) pouco influa na estabilidade, uma vez que os dados $s_T^i(t)$ nos merecem — admitimos por hipótese — igual dose de confiança, ao contrário do que sucede na técnica da autocorrelação em que os valores de $\Psi_T^i(\tau)$ correspondentes aos maiores atrasos são calculados com menos dados.

O problema aqui reside nos lobos laterais introduzidos pelas descontinuidades em $t = \pm T/2$ da janela $B_0(t)$.

Quanto mais gradual for o andamento de B (t) na vizinhança de $t = \pm T/2$, menos oscilações introduzirá na sua transformada J (f) e consequentemente em $Q_e(f)$.

5.1.4. *Resolução*

Aplicam-se aqui as conclusões tiradas no método da autocorrelação:

— Bastará efectuar-se estimativas de $W^i(f)$ para valores de f espaçadas de $\frac{1}{2T}$, visto que $W^i(f)$ tem como transformada de Fourier a função $\Psi^i(\tau)$ que se anula para $|\tau| > T$ (ver 5.2).

— A resolução depende porém da configuração das janelas $Q_e(f)$, não se podendo portanto exprimir Δf de modo genérico em função de $\frac{1}{T}$.

5.2. CASO DISCRETO

5.2.1 Podemos reduzir este caso ao caso contínuo, precisamente através da janela B (t), dando a esta a forma duma sucessão equi-espaçada de funções δ (2) (fig. 5-2).

Ackasu (3) propõe uma janela uniforme idêntica à $\nabla(\tau, \Delta t)\,D_0(\tau)$ que utilizámos em § 4.2.3.

$$B(t) = \nabla(t, \Delta t)\,B_0(t) \tag{5.12}$$

---

(1) Ref 2.

(2) Atitude esta que não era possível no método da autocorrelação, em que apenas as estimativas desta são modificadas através de janelas.

(3) Ref. [2].

Uma vez que em $W^i(f)$ só intervêm módulos de transformadas de Fourier, resulta que as nossas estimativas não serão afectadas por uma translação no tempo de $s^i(t)\,B(t)$.

Nestas condições, e por se tornar formalmente mais simples, vamos considerar o intervalo T com origem em $t = \Delta t$.

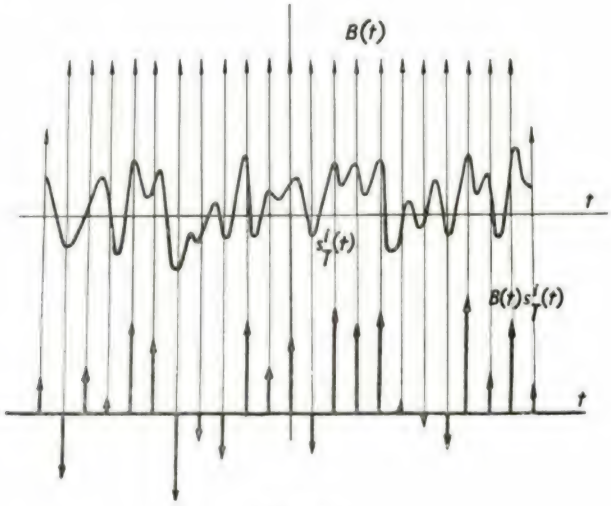


Fig. 5-2

Então (5.12.) escreve-se agora

$$B(t) = \Delta t \left\{ \frac{1}{2}\,\delta(t - \Delta t) + \sum_{q=2}^{n} \delta(t - q\,\Delta t) + \frac{1}{2}\,\delta[t - (n+1)\,\Delta t] \right\} \tag{5.13}$$

Utilizando em seguida a expressão (5.1), e atendendo a que a função $s_T^i(t)$ é, com a nova origem dos tempos, conhecida desde $t = \Delta t$ até $t = (n+1)\,\Delta t$, vem para $W^i(f)$:

$$W^i(f) = \frac{1}{T}\left[a^2(f) + b^2(f)\right] \tag{5.14}$$

com

$$\begin{cases} a(f) = \Delta t \left\{ \frac{1}{2}\, s_T^i(\Delta t)\cos 2\pi f\,\Delta t + \sum_{q=2}^{n} s_T^i(q\,\Delta t)\cos 2\pi f\,q\,\Delta t + \frac{1}{2}\, s_T^i[(n+1)\,\Delta t]\cos 2\pi f\,(n+1)\,\Delta t \right\} \\ b(f) = \Delta t \left\{ \frac{1}{2}\, s_T^i(\Delta t)\,\mathrm{sen}\, 2\pi f\,\Delta t + \sum_{q=2}^{n} s_T^i(q\,\Delta t)\,\mathrm{sen}\, 2\pi f\,q\,\Delta t + \frac{1}{2}\, s_T^i[(n+1)\,\Delta t]\,\mathrm{sen}\, 2\pi f\,(n+1)\,\Delta t \right\} \end{cases} \tag{5.15}$$

5.2.2. *Resolução*

Tal como no caso contínuo, verifica-se

$$< W^i(f) > = Q_{ea}(f) * W(f) \tag{5.16}$$

sendo, para a janela B (t) utilizada

$$Q_{ea}(f) = T\left[\frac{\cos(\pi f\,\Delta t)\,\mathrm{sen}\,(n\,\pi f\,\Delta t)}{n\,\mathrm{sen}\,\pi f\,\Delta t}\right]^2 \tag{5.17}$$

que é uma função periódica (no domínio de f) de período $\frac{1}{\Delta t}$. (cf. 4.34) (Fig. 5-3)

Vemos assim que vai haver sobreposição de frequências separadas de $\frac{1}{\Delta t}$, através dos lobos principais, desde que $2F\Delta t > 1$, em que F é a frequência máxima do processo, suposto de banda limitada. (Fig. 5-4)

É, de resto, o que se passa, também como já vimos, no método da autocorrelação, e constitui uma característica inerente aos métodos de amostragem (*sampling*).

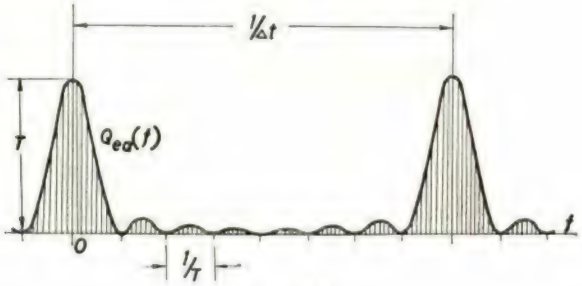


Fig. 5-3

A resolução é definida como

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{n \Delta t} \tag{5.18}$$

tal como no método da autocorrelação, uma vez que se verifica que para este espaçamento as duas janelas correspondentes são relativamente independentes.

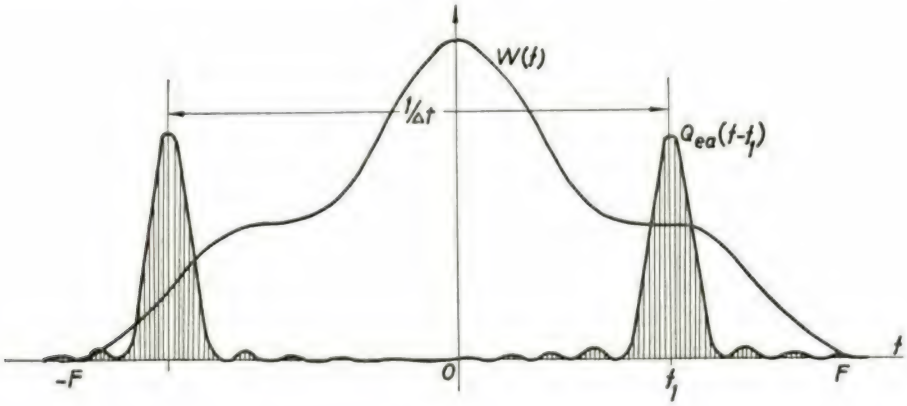


Fig. 5-4

As janelas Q_2 (f) daquele método, cruzam-se para este intervalo Δf a meia altura.
Aqui teremos aproximadamente o mesmo:

$$Q_{ea}\left(f = \frac{\Delta f}{2}\right) = Q_{ea}\left(f = \frac{1}{2 n \Delta t}\right)$$

$$= \frac{T}{n^2} \cdot \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi}{2n} \simeq \frac{4}{\pi^2} T \text{ (para } n >> 1) \simeq 40\,\% \text{ da altura máxima}$$

Apesar de a resolução ser $\frac{1}{T}$, há que calcular W^i (f) a intervalos $\frac{1}{2T}$, como já indicámos, pelo facto de a sua transformada ser de duração limitada.

5.2.3. *Estabilidade*

Supondo não haver a referida sobreposição de frequências (*aliasing*) o espectro W (f) só conterá um lobo principal. Nestas condições, pode ver-se que a expressão (5.11) da dispersão relativa toma os valores mencionados no § 5.1.3 do caso contínuo, tendo-se portanto, nas zonas em que W(f) não apresenta picos, $k = 2$, valor este que se reduz a metade para $f = 0$.

No entanto, e como já vimos antes, a média de p estimativas diferentes (e independentes) terá 2 p graus de liberdade (p, para $f = 0$).

5.3. ORGANIZAÇÃO DO CÁLCULO DO ESPECTRO DE POTÊNCIA

5.3.1. *Caso contínuo*

Fixemos, como sempre, Δf e D_p.
De (5.12) tira-se

$$\boxed{T = T_k = \frac{1}{\Delta f}} \quad \text{duração de um registo.}$$

Admitindo dum modo geral $k = 2$ por estimativa, será, como vimos $k = 2p$. O valor k tira se de D_p, extraído de (4.16), pelo que obtemos o número p necessário de registos

$$\boxed{p = \frac{k}{2}}$$

Temos assim tudo quanto precisamos para o cálculo directo: o número de registos e a duração de cada um deles.

Escolhida a janela $B(t)$, não temos mais do que efectuar as estimativas (5.1) para os p registos *diferentes* e proceder à determinação da sua média aritmética.

5.3.2. *Caso discreto*

Além de Δf e D_p há que estabelecer a frequência máxima em jogo no processo.
E teremos assim, sucessivamente

$$\boxed{T = T_k = \frac{1}{\Delta f}} \quad \text{e} \quad \boxed{p = \frac{k}{2}} \quad \text{como no caso anterior.}$$

E ainda,

$$\boxed{\Delta t = \frac{1}{2F}} \quad \text{espaçamento do } \textit{sampling} \text{ necessário}$$

$$\boxed{n = \frac{T_k}{\Delta t}} \quad \text{sendo } n + 1 \text{ o número de pontos exigidos por um registo}$$

$$\boxed{N = (n + 1)\, p \simeq n\, p} \quad \text{o número total de pontos a utilizar.}$$

Com estes elementos elaboramos agora as estimativas (5.16) com as quais calculamos $W^i(f)$, por meio de (5.15), para as frequências múltiplas de $\frac{1}{T}$.

Finalmente, com as p estimativas correspondentes aos p registos independentes necessários, determinamos a respectiva média aritmética, que constituirá a nossa estimativa do espectro de potência.

6. COMPARAÇÃO DOS 2 MÉTODOS

6.1. Vamos agora representar esquemàticamente os dois métodos estudados, em igualdade de resolução Δf, banda F (caso discreto) e estabilidade traduzida pelo número k de graus de liberdade.

O quadro II mostra-nos os elementos necessários ao cálculo do espectro, nos 2 métodos, por ele se vendo que o número de pontos da função $s^i(t)$ a registar, é aproximadamente o mesmo, assim como o espaçamento, que só depende da banda do processo.

QUADRO II

Dados : F, Δf, k

Parâmetro	Método da autocorrelação	Método da análise directa	
N.º de registos p	Arbitrário, sendo $4p < 3k$	$p = \frac{k}{2}$	Geral
Duração de cada registo T_k	$T_k = \left(\frac{1}{3} + \frac{k}{2p}\right) / \Delta f$	$T_k = 1/\Delta f$	
Atraso máximo T_m	$T_m = \frac{1}{\Delta f}$	—	Caso contínuo
N.º de atrasos $m + 1$	$m = \frac{2F}{\Delta f}$	—	Caso discreto
Espaçamento Δt	$\Delta t = \frac{1}{2F}$	$\Delta t = \frac{1}{2F}$	
N.º de pontos por registo $n + 1$	$n = \frac{2F}{\Delta f}\left(\frac{1}{3} + \frac{k}{2p}\right)$	$n = \frac{2F}{\Delta f}$	
N.º total de pontos N	$N = pn = \frac{2F}{\Delta f}\left(\frac{p}{3} + \frac{k}{2}\right)$	$N = \frac{2F}{\Delta f} \cdot \frac{k}{2}$	

A precisão dos 2 métodos não é exactamente a mesma, em igualdade de resolução Δf.

Isto resulta de as janelas $Q_e(f)$ e $Q(f)$ não serem idênticas. Em geral, para os casos apontados é $Q_e(f)$ pior que $Q(f)$, no que respeita à amplitude dos lobos laterais.

Quer dizer que para a mesma resolução Δf, as estimativas do método directo vão ser *mais* influenciadas pelos valores do espectro relativos a frequências na vizinhança dos lobos laterais, do que no método da autocorrelação.

* * *

A comparação dos dois métodos no que se refere ao custo do cálculo — traduzido através do número de operações envolvidas — será tratada noutra publicação.

* * *

6.2. Estudámos comparativamente os dois métodos de determinação do espectro de potência $W(f)$, obtendo-se a maior parte dos resultados (incluindo as normas de projecto) estritamente na hipótese de $s^i(t)$ constituir ruído gaussiano, e de o espectro não apresentar acidentes muito pronunciados (à escala da largura das janelas $Q(f)$).

Igualmente suposemos, no caso dos registos directos, que a frequência de amostragem era dupla duma certa frequência F, acima da qual o espectro se anulava (pelo menos pràticamente).

Pode-se perguntar agora o que sucede se alguma ou algumas daquelas hipóteses se não verificarem.

No que respeita à banda F ou ao acidentado do espectro, há um certo número de correcções que, dentro da aproximação que estes métodos implicam, se podem considerar satisfatórias. Daremos adiante uma breve descrição destas correcções.

Quanto ao facto de o ruído a analisar não ser gaussiano, isso vai traduzir-se por uma maior dispersão relativamente aos valores previstos.

Lembremo-nos, porém, que outras fontes de dispersão existem, como as falhas de estacionaridade, e que portanto os resultados que atrás indicámos no estudo da estabilidade se devem entender como aproximados, sendo esta aproximação geralmente satisfatória, segundo mostra a experiência.

7. OBSERVAÇÕES AO CÁLCULO E CORRECÇÕES

7.1 CORRECÇÃO PARA OS ESPECTROS DE ANDAMENTO ACIDENTADO. PRÉ-ÊNFASE

7 1.1. A existência do operador $Q(f) *$ nas nossas estimativas, em que $Q(f) \neq \delta(f)$, implica como vimos, contribuição de frequências vizinhas, contribuição essa que pode ser bastante apreciável no caso de o espectro $W(f)$ tomar valores muito elevados sobre os lobos laterais das referidas janelas (Fig. 7-1).

Por outro lado, a análise da estabilidade que foi feita mostra-nos que os valores de k usados no projecto são válidos apenas na condição de $W(f)$ variar relativamente pouco para um intervalo da ordem da distância entre lobos. Caso contrário aquele número k baixa apreciàvelmente.

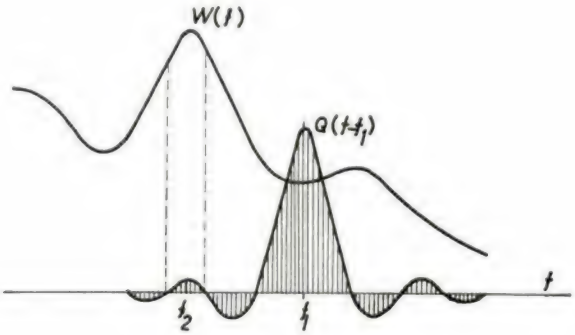


Fig. 7-1

Por estes dois motivos, uma vez fixada a janela, um caminho a seguir será procurar tornar o espectro que se analisa pouco acidentado (1), o que se consegue por meio de filtros, ou, analìticamente, alterando convenientemente os dados.

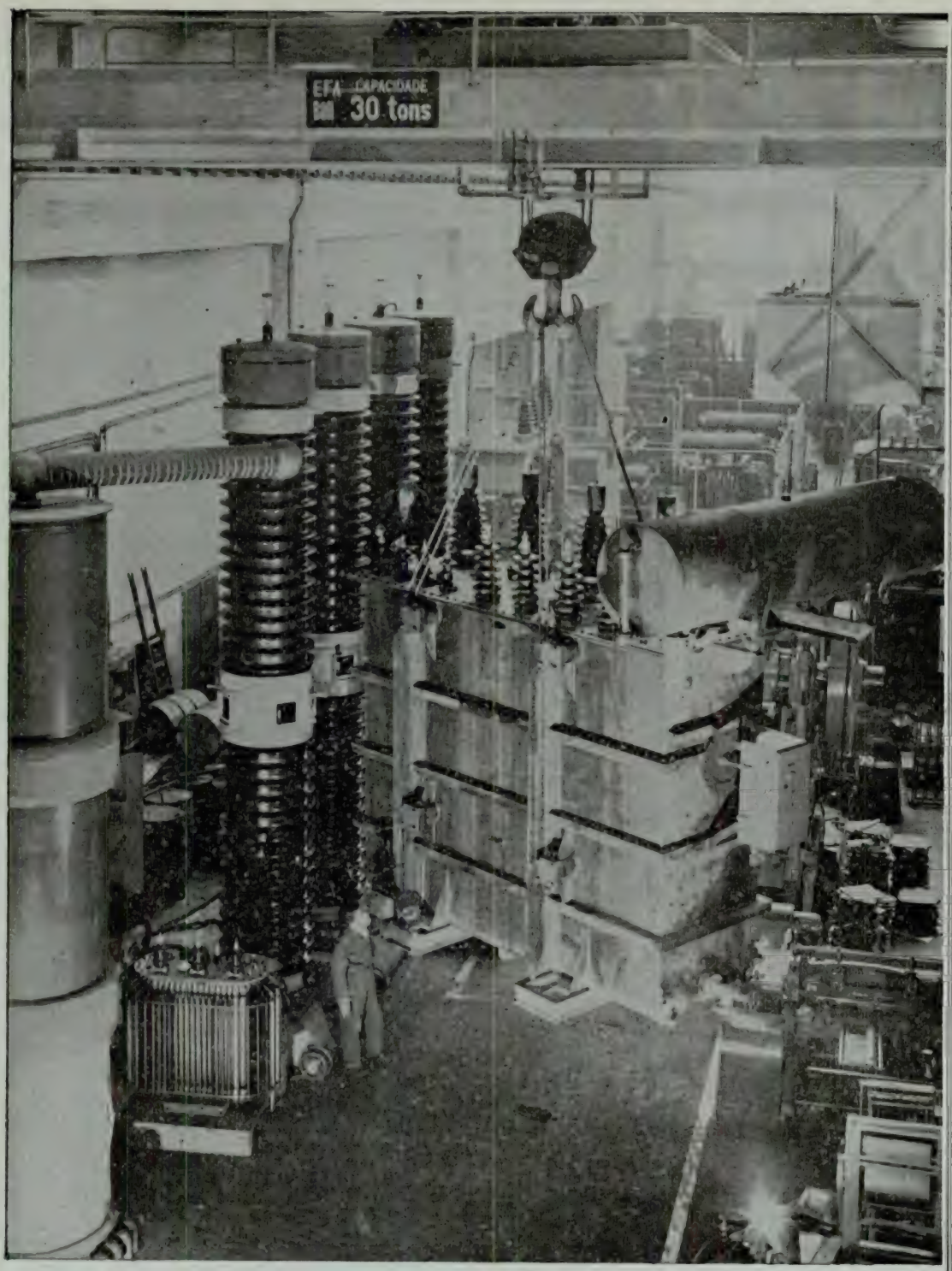
Esta alteração dos dados pode realizar-se no caso discreto de modo simples, por meio de *combinações lineares* dos tipos

$$Y_q = X_q - \sum_{r=1}^{s} \alpha_r X_{q-r} \text{ — combinação linear móvel} \tag{7.1}$$

$$Y_q = X_q + \sum_{r=1}^{s} \beta_r Y_{q-r} \text{ —série auto-regressiva} \tag{7.2}$$

em que X_q representa o elemento de ordem q da sucessão $s_T^i(p\Delta t)$, iniciada arbitràriamente, e Y_q o elemento correspondente da nova sucessão.

(1) Embora não se necessite uniformizar absolutamente o espectro, esta técnica (Ref. 1) recebeu a denominação de «prewhitening» inspirada na uniformidade do ruído branco (*white noise*).



EFACEC

Vista do interior de uma das Fábricas "EFACEC"
(Arroteia — S. Mamede de Infesta)

Distinguem-se nesta fotografia :

— Um transformador de 15 000 kVA/60 000 V (marca EFACEC) com regulação em carga, em curso de fabrico.

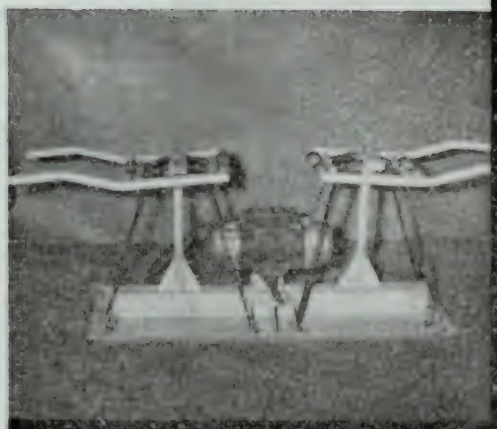
— Um disjuntor de 220 000 V (marca SOPREL), aguardando ensaio de rigidez.

— Nota-se também um transformador de ensaios de 600 000 V

EFACEC

publivasc

vibração do betão



vibradores externos e internos

réguas vibrantes equipamentos vibrantes
para superficies

energia electrica, peneumatica e gasolina

alta frequência e meia frequência

representante sociedade comercial romar ltda
rua da boavista, 83, 1.º d
lisboa

urbar
ingenieros

san sebastián
av generalisimo, 6
espanha

Prova-se fàcilmente que se tem [1]

$$\frac{W'_a(f)}{W_a(f)} = \left| 1 - \sum_{r=1}^{s} \alpha_r \, e^{-j2\pi f r \Delta t} \right|^2 \tag{7.3}$$

$$\frac{W'_a(f)}{W_a(f)} = \left| 1 - \sum_{r=1}^{s} \beta_r \, e^{-j2\pi f r \Delta t} \right|^{-2} \tag{7.4}$$

respectivamente, em que $W_a(f)$ e $W'_a(f)$ são os espectros periódicos (v. § 4.2.3) correspondentes às sucessões X_q e Y_q.

Estes dois tipos de combinações lineares, quando devidamente associados conduzem a expressões racionais em $\cos 2\pi f \Delta t$ de qualquer grau, e portanto periódicas em f com período $\frac{1}{\Delta t}$.

Claro que uma vez feita a estimativa baseada nos novos valores há que multiplicar o espectro obtido pelo factor inverso do utilizado.

7.1.2 Quando o espectro apresente *linhas*, isto é, picos de amplitude muito grande comparada com o restante espectro, e de largura muito pequena comparada com a banda $\frac{1}{T}$, o problema de obter uma combinação linear conveniente pode tornar-se inviável, em virtude do grande número do parâmetros α_r e β_r necessários.

Nestas condições torna-se preferível efectuar duas análises dos dados, uma estimativa na zona que contém o pico, e outra longe desta.

Esta segunda determinação implica uma pré-ênfase sem grande rigor, que nos permite analisar $W(f)$ no restante domínio, sem que o pico vá causar perturbação.

Quanto à avaliação de $W(f)$ no próprio pico, uma simples estimativa comparada com a que referimos pode dar uma boa ideia da amplitude e largura do pico.

Para melhor localização do pico pode-se, evidentemente, usar um filtro de banda pelo qual se faz passar o espectro a analisar.

7.1.3. Quando os picos do espectro aparecem nas muito baixas frequências, há um tipo de correcção muito mais simples. É este o caso das variações lentas (no tempo) e termos constantes introduzidos durante as medidas e que os sistemas digitais não cortam.

A fim de obviar a este inconveniente, e porque não conhecemos o valor médio e a baixa frequência (estranhos ao processo) introduzidos, Blackman & Tukey [2] aconselham, no método da autocorrelação, a subtrair sistemàticamente, dos valores $\Psi^i(q\Delta\tau)$ calculados, expressões convenientes.

Assim, por exemplo, a *rejeição* do valor médio pode ser obtida subtraindo de cada estimativa $\Psi^i_T(q\Delta t)$, o quadrado da média aritmética dos $n+1$ valores $X_q = s^i_T(q\Delta t)$, ou seja

$$\boxed{\left[\frac{1}{n+1} \sum_{q=1}^{n+1} s^i_T(q\Delta t) \right]^2} \tag{7.5}$$

Esta subtracção, vindo afectar *igualmente* todos os valores de $\Psi^i(q\Delta t)$, irá afectar a estimativa $W^i(f)$ apenas nas frequências $f = 0$ e $f = \frac{t}{2m\Delta t}$ (para as janelas $D(\tau)$ usadas).

---

(1) Estas relações só são exactas se X_q for definido para $q = -\infty$. No caso real, se X_q se iniciar p. ex. para $q = 0$, a relação 7.1 só tem sentido para Y_q a partir de $q = s$. Para $q > s$ a não utilização de alguns elementos vai introduzir em 7.3 soluções não periódicas.

(2) Ref. [1] — págs. 47.

Prova-se que, para o ruído branco, isto equivale estatìsticamente a multiplicar o espectro do processo que se pretende estudar, isto é, o processo sem o valor médio introduzido, pelos factores

$$\left(1 - \frac{m}{n}\right) \quad e \left(1 - \frac{m}{2n}\right) \tag{7.6}$$

respectivamente, nas frequências $f = 0$ e $f = 1/2\, m \Delta t$ pelo que há que multiplicar as determinações assim feitas pelos factores inversos daqueles.

Pode-se, alternativamente, subtrair de cada observação $s_T^i\,(q\Delta t)$ a média de todas as observações.

$$\frac{1}{n+1} \sum_{q=1}^{n+1} s_T^i\,(q\,\Delta t) \tag{7.7}$$

com as mesmas correcções a fazer.

Para rejeitar simultâneamente valores médios são nulos (termo constante) e variações lentas, indica-se a subtracção às estimativas $W_T^i\,(q\,\Delta t)$ da expressão

$$\overline{s_T^i}^2 + \frac{3}{16}\left(\overline{s_{T+}^i} - \overline{s_{T-}^i}\right)^2 \tag{7.8}$$

em que $\overline{s_T^i}$, $\overline{s_{T+}^i}$ e $\overline{s_{T-}^i}$ representam as médias aritméticas respectivamente dos $n+1$ valores $s_T^i\,(q\,\Delta t)$, do terço superior e do terço inferior da mesma sucessão.

Para esta correcção os factores finais a usar serão os inversos de

$$\left(1 - \frac{2m}{n}\right) \text{ e } \left(1 - \frac{m}{n}\right) \text{ para } f = 0 \text{ e } f = \frac{1}{2\,m\,\Delta t} \tag{7.9}$$

7.2. EFEITOS DUM ESPAÇAMENTO INCORRECTO Δt

7.2.1. Vimos, quando estudámos o método da autocorrelação para o caso discreto, que se tinha

$$\boxed{< W^i\,(f) > = Q\,(f) * W_a\,(f)} \tag{4.33}$$

Ao estudarmos o método directo obtivemos, no caso discreto,

$$< W^i\,(f) > = Q_{ea}\,(f) * W\,(f)$$

em que $Q_{ea}\,(f)$ era uma função periódica de período $\frac{1}{\Delta t}$ simétrica em torno de $f = \frac{q}{\Delta t}$.

Escrevendo

$$Q_{ea}\,(f) = A\left(f, \frac{1}{\Delta t}\right) * Q_e\,(f) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} Q_e\left(f - \frac{q}{\Delta t}\right)$$

obtemos uma expressão idêntica a (4.33)

$$\boxed{< W^i\,(f) > = Q_e\,(f) * W_a\,(f)} \tag{7.10}$$

Portanto, em qualquer dos métodos, a média das estimativas pode apresentar-se como um integral de convolução entre uma janela $Q\,(f)$ ou $Q_e\,(f)$ não periódica e um espectro periódico, $W_a\,(f)$ resultante de $W\,(f)$ por sobreposição de frequências.

Para melhor compreendermos o significado destas expressões, suponhamos o registo $s_T^i(t)$ ilimitado. Nestas condições, tanto $D(\tau)$ como $B(t)$ se podem considerar de duração ilimitada. Usando janelas uniformes, teríamos em qualquer dos casos $Q(f) = Q_e(f) = \delta(f)$.

As expressões (4.33) e (7.10) escrever-se-iam então

$$< W^i(f) > = W_a(f) \tag{7.11}$$

Quer isto dizer que, mesmo nesta hipótese duma amostragem indefinida ($n = \infty$) há indeterminação para $W(f)$.

O que se determinaria *univocamente* (em média) seria apenas a versão $W_a(f)$ do espectro pretendido $W(f)$.

$W_a(f)$ representa portanto, no limite, tudo quanto podemos aspirar a determinar.

Esta indeterminação resulta da natureza discreta dos nossos registos.

Sendo as funções $s^i(t)$ apenas conhecidas (ou utilizadas) a intervalos iguais Δt, sabemos da teoria da interpolação que este conhecimento é suficiente para determinar todos os pontos intermédios (e daí $W(f)$) *apenas* no caso de o espectro da função (e com ele, $W(f)$) ser limitado a $F = \frac{1}{2\Delta t}$.

Se for este o caso, $W_a(f)$ coincide com $W(f)$ dentro do intervalo $|f| < \frac{1}{2\Delta t}$, e a expressão (7.11) escreve-se

$$\boxed{< W^i(f) > = W(f)} \tag{7.12}$$

que é a relação ideal (cf. caso contínuo com $T = \infty$).

No caso porém em que $W(f)$ não é limitado, ou é limitado, mas $F \neq \frac{1}{\Delta t}$, teremos que

— ou nós conhecemos $F > \frac{1}{\Delta t}$, e o espectro obtido (no limite) $W_a(f)$ é uma sobreposição dos valores do espectro pretendido $W(f)$ em diferentes frequências

— ou nós não conhecemos F, e $W(f)$ então é completamente indeterminado, não podendo nós sequer fazer uma ideia da validade da nossa estimativa.

7.2.2. Uma interpretação geométrica curiosa deste espectro $W_a(f)$ (1) resulta de se escrever esta função sob a forma

$$W_a(f_1) = W(f_1) + W(2f_N - f_1) + W(2f_N + f_1) + W(4f_N - f_1) + W(4f_N + f_1) + \ldots \tag{7.13}$$

visto $W(f)$ ser uma função par, sendo

$$\boxed{f_N = \frac{1}{2\Delta t}} \tag{7.14}$$

Se dispusermos os vários argumentos no domínio de f que se irão sobrepor em $W_a(f)$, obteremos para uma frequência $f < f_N$ (o caso $f > f_N$ é redutível a este) a disposição da Fig. 7-2.

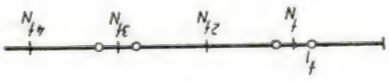


Fig. 7-2

Fig. 7-3

Se dobrarmos em zig-zag este eixo das frequências pelos pontos $q f_N$, obteremos agora a disposição da Fig. 7-3, em que se vêem sobrepostas as frequências com que $W(f)$ irá contribuir para $W_a(f)$.

$W_a(f)$ aparece-nos assim como resultante da *dobragem* do espectro pelas frequências múltiplas de f_N (*folding frequency* ou frequência de Nyquist) (1) (Fig. 7-4).

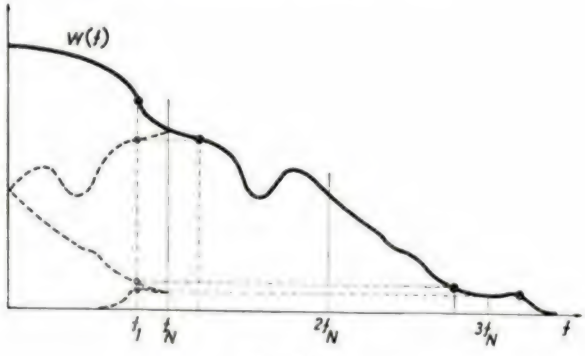


Fig. 7-4

7.2.3. *Em resumo*: Analìticamente ou geomètricamente vemos como, no caso de o espectro $W(f)$ ser limitado a $F = f_N$, todos os termos do desenvolvimento de $W_a(f_1)$ são nulos, à excepção do primeiro, que é precisamente $W(f_1)$, sendo portanto o *folding* inoperante. Nestas condições a média de todas as estimativas possíveis, que é igual a $Q(f) * W_a(f)$, só recebe contribuição das frequências dentro da resolução Δf, e apenas para f_1 próximo do extremo f_N, é afectada pela periodicidade de $W_a(f)$ (Fig. 7-5).

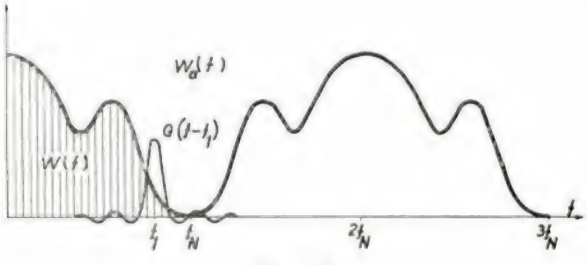


Fig. 7-5

No caso de $F > f_N$, porém, a média referida pode ser completamente estranha ao pretendido. Bastará para tanto que algum dos termos $W(2q\, f_N \pm f_1)$ tenha valor apreciável (v. Fig. 7-4).

7.3. PROBLEMAS DE ECONOMIA DO CÁLCULO. AS BAIXAS FREQUÊNCIAS

7.3.1. A indeterminação de $W(f)$ que acabamos de estudar constitui, por ser inerente aos processos de amostragem, um inconveniente que, para uma dada banda F e uma vez escolhido o espaçamento Δt, é impossível evitar.

Vamos mostrar, no entanto, que em determinadas condições se pode evitar o *aumento* daquela indeterminação, decorrente duma redução de frequência de dobragem f_N.

Isso consegue-se, como veremos, quando se está interessado *apenas* na zona inferior do espectro e se pretende melhorar aí a resolução, sem onerar demasiado o cálculo (2).

Antes porém vamos estabelecer um método de, a partir dum dado registo discreto, fazer variar os factores estabilidade, resolução e número de multiplicações necessárias, à custa duma diminuição da frequência f_N.

---

(1) Ref. [1].

(2) O volume do cálculo, quando este é feito por meio de computadores digitais, depende largamente do número de multiplicações necessárias, podendo dizer-se que este número, que é dado aproximadamente por $M = m\,n$ por registo, no método de autocorrelação (Ref. 1, pág. 44) é uma boa medida do custo do cálculo.

O referido método consiste no seguinte:

Tomemos um registo de $n+1$ dados espaçados de Δt e desdobremo-lo em h registos de $\frac{n+1}{h}$ dados espaçados de $\Delta\tau = h\Delta t$, como se indica na figura.

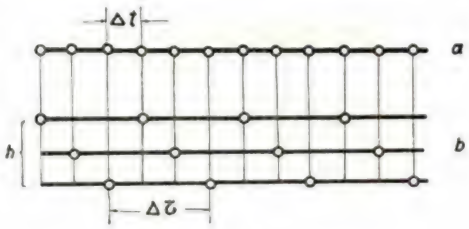


Fig. 7-6

Apliquemos o método da autocorrelação e comparemos uma estimativa do tipo (*a*) que utiliza todos os pontos e um atraso máximo $m\Delta t$:

1) com 1 estimativa a partir de um dos h registos do tipo (*b*) que utiliza apenas pontos de $h\Delta t$ em $h\Delta t$, com um atraso máximo $m'\Delta\tau$
2) com a média das *h* estimativas possíveis idênticas à anterior.

Em vista de análise feita, pode obter-se o quadro seguinte.

QUADRO III

1 estimativa (*a*)

Estabilidade	Resolução	Custo	Dobragem
k	Δf	M	f_N

1 estimativa (*b*)

Estabilidade	Resolução	Custo	
$k' = k$	$\Delta f' = \Delta f$	$M' = M/h^2$	$m' = m/h$
$k' = k\,h$	$\Delta f' = \Delta f/h$	$M' = M/h$	$m' = m$
$k' = k/h^2$	$\Delta f' = \Delta f/h^2$	$M' = M$	$m' = mh$

h estimativas (*b*)

Estabilidade	Resolução	Custo
$k' = kh$	$\Delta f' = \Delta f$	$M' = M/h$
$k' = k$	$\Delta f' = \Delta f/h$	$M' = M$
$k' = k/h$	$\Delta f' = \Delta f/h^2$	$M' = Mh$

Para todos os casos: $f'_N = f_N/h$

Finalmente, determinemos a relação entre o espectro periódico $W_a(f)$ correspondente ao registo primitivo, e o espectro $W_{ah}(f)$ correspondente a *qualquer* dos registos (b).

Tem-se

$$W_a(f) = A\left(f, \frac{1}{\Delta t}\right) * W(f)$$

$$W_{ah}(f) = A_h\left(f, \frac{1}{\Delta t}\right) * W(f)$$

em que

$$A\left(f, \frac{1}{\Delta t}\right) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{q}{\Delta t}\right) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta(f - 2q f_N)$$

$$A_h\left(f, \frac{1}{h\Delta t}\right) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{q}{h\Delta t}\right) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{2q}{h} f_N\right)$$

$$A_h\left(f, \frac{1}{h\Delta t}\right) = \sum_{r=0}^{h-1} A\left(f - \frac{2r}{h} f_N, \frac{1}{\Delta t}\right)$$

E portanto

$$W_{ah}(f_1) = \sum_{r=0}^{h-1} W_a\left(f_1 + \frac{2r}{h} f_N\right) \tag{7.15}$$

O espectro periódico $W_{ah}(f)$ resulta assim de h sobreposições do espectro original $W_a(f)$.

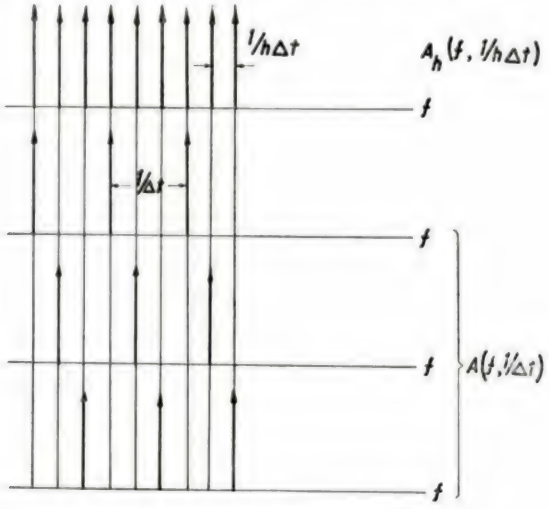


Fig. 7-7

7.3.2. Vamos agora descrever a compensação do abaixamento de f_N, nas baixas frequências, referida no último parágrafo.

Suponhamos que pretendemos levar o cálculo de $W(f)$ até uma frequência mais baixa do que aquela que o nosso projecto de cálculo determinou $\left(\frac{1}{2m\Delta t}\right)$, sem aumentar o cálculo, ou que pretendemos baixar este, mantendo embora a resolução. Desde que estejamos interessados só nas baixas frequências podemos utilizar o método do parágrafo anterior.

Consultando o quadro III vemos que, mantendo a estabilidade podemos obter o que pretendemos com *uma* estimativa e $m' = m/h$, ou com h estimativas e $m' = m$. No 1.º caso mantemos a resolução e baixa-se o número de operações de M para M/h^2 e no 2.º baixa-se a resolução, mantendo-se M.

Em qualquer dos casos porém $f'_N = f_N/h$.

Se o valor f_N utilizado já for o menor que não prejudica as determinações no terço inferior do espectro, ou se $F \simeq 3 f_N/2$, então não podemos pensar em reduzir f_N (por ex. a metade) sem tomar qualquer precaução.

Essa precaução consiste no seguinte:

Efectuemos a combinação linear

$$Z_q = X_q + X_{q-1} + \ldots + X_{q-k+1} \tag{7.16}$$

sendo X_q o elemento da ordem q da sucessão $s_T^i(q\Delta t)$.

Tem-se como se sabe

$$\frac{W'_a(f)}{W_a(f)} = \left| 1 + \sum_{q=1}^{k-1} e^{-j2\pi f q \Delta t} \right|^2 = \left(\frac{\operatorname{sen} \pi f k \Delta t}{\operatorname{sen} \pi f \Delta t}\right)^2 = Y(f) \tag{7.17}$$

em que $W_a(f)$ diz respeito à sucessão $s_{\frac{i}{T}}$ do processo em estudo, e W'_a à sucessão definida por 7.16.

Apliquemos agora a combinação (7.16) ao espectro representado na Fig. 7-8.

Vemos que $Y(f)$ atenua consideràvelmente o espectro $W_a(f)$ na região em que ele não coincide com $W(f)$ (dentro do intervalo $[o, \pm f_N]$, claro) (Fig. 7-9).

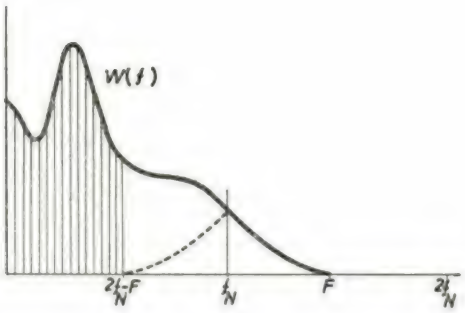


Fig. 7-8

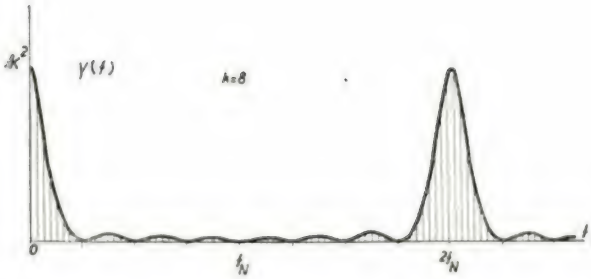


Fig. 7-9

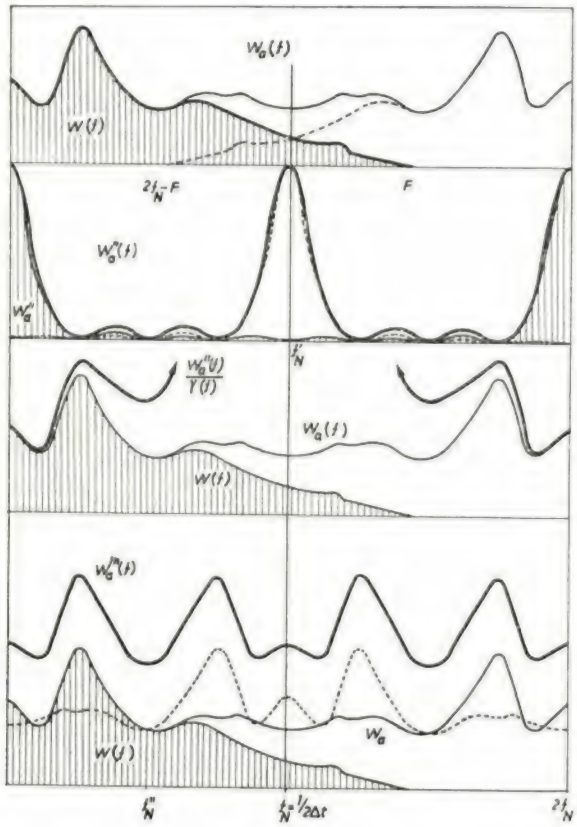


Fig. 7-10

Se agora utilizarmos apenas 1 em cada 2 dados Z_q, obteremos um novo espectro periódico $W''_a(f) = W'_a(f) + W'_a(f + f_N)$ (v. 7.15) cuja frequência de Nyquist f''_N é igual a metade da anterior $f'_N = f_N$ (Fig. 7-10).

Se finalmente multiplicarmos $W''_a(f)$ (1) por $1/Y(f)$, vemos que o resultado obtido difere muito pouco do pretendido $W_a(f)$ dentro da zona $|f| < f_N/4$, crescendo a divergência entre os valores $\frac{W''_a(f)}{Y(f)}$ e $W_a(f)$ ràpidamente, à medida que $|f|$ varia de $f_N/4$ até f_N. (1)

Portanto *dentro* da zona $|f| < f_N/4$ (ou um pouco mais além) os efeitos da diminuição de f_N pelo uso de metade dos valores Z_q foram muito atenuados, o que não nos deve surpreender, pois lembremo-nos que estes Z_q mesmo reduzidos a metade contêm *quase toda a informação* das baixas frequências, o que não aconteceria se nos limitássemos a utilizar metade dos X_q (Fig. 7-10), caso em que se obtém W'''_a muito diferente de W_a.

Em resumo, querendo economizar o cálculo devemos proceder como segue:

1) Efectuar a combinação (7.16).
2) Aproveitar estes dados, utilizando um sim, um não.

---

(1) $\frac{W''_a}{Y} = W_a \cdot \sec^2 \pi f \Delta t$, como se verifica fàcilmente.

QUADRO IV

	$(\Delta X)^2$		$(\Delta Y)^2$		$(\Delta Z)^2$		$(\Delta U)^2$		$(\Delta W)^2$
X_1									
X_2	$(X_2 - X_1)^2$	$Y_1 = X_1 + X_2$							
X_3									
X_4	$(X_4 - X_3)^2$	$Y_2 = X_3 + X_4$	$(Y_2 - Y_1)^2$	$Z_1 = Y_1 + Y_2$					
X_5									
X_6	$(X_6 - X_5)^2$	$Y_3 = X_5 + X_6$							
X_7									
X_8	$(X_8 - X_7)^2$	$Y_4 = X_7 + X_8$	$(Y_4 - Y_3)^2$	$Z_2 = Y_3 + Y_4$	$(Z_2 - Z_1)^2$	$U_1 = Z_1 + Z_2$			
X_9									
X_{10}	$(X_{10} - X_9)^2$	$Y_5 = X_9 + X_{10}$							
X_{11}									
X_{12}	$(X_{12} - X_{11})^2$	$Y_6 = X_{11} + X_{12}$	$(Y_6 - Y_5)^2$	$Z_3 = Y_5 + Y_6$					
X_{13}									
X_{14}	$(X_{14} - X_{13})^2$	$Y_7 = X_{13} + X_{14}$							
X_{15}									
X_{16}	$(X_{16} - X_{15})^2$	$Y_8 = X_{15} + X_{16}$	$(Y_8 - Y_7)^2$	$Z_4 = Y_7 + Y_8$	$(Z_4 - Z_3)^2$	$U_2 = Z_3 + Z_4$	$(U_2 - U_1)^2$	$W_1 = U_1 + U_2$	W_1^2
	$\Sigma = P_4$		$\Sigma = P_3$		$\Sigma = P_2$		$\Sigma = P_1$		P_0
	$\left(f_N, \frac{1}{2} f_N\right)$		$\left(\frac{1}{2} f_N, \frac{1}{4} f_N\right)$		$\left(\frac{1}{4} f_N, \frac{1}{8} f_N\right)$		$\left(\frac{1}{8} f_N, \frac{1}{16} f^N\right)$		$\left(\frac{1}{16} f_N, 0\right)$

3) Realizar uma estimativa de W^i seguindo os métodos estudados.

4) Multiplicar a estimativa final pelo inverso de Y (f). (1)

Com *uma* estimativa obtemos assim a mesma estabilidade e resolução, e, o que é mais importante, reduzimos o número de multiplicações de 4 vezes (as operações suplementares provenientes do uso de Y(f) pouco afectam esta economia).

O contra está na perda de informação nas frequências mais elevadas.

Com as *h* estimativas (neste caso, 2) e um número de atrasos duplo (h vezes maior), conseguimos descer na resolução para metade (sempre nas baixas frequências), mantendo a estabilidade e não onerando o cálculo.

O método é generalizável (2) a $k > 8$ ($k = 4h$), sendo o 1.º lobo obtido, ou seja, para $|f| < \frac{f_N}{2h}$, o menos afectado.

8. ESTIMATIVAS PRÉVIAS

8 1. Vistos dum modo geral os tratamentss que os registos devem sofrer, antes de se efectuarem as estimativas, e as respectivas correcções finais, resta dizer que toda esta análise pressupõe em geral um conhecimento aproximado prévio do espectro a estudar, a fim de que se possa proceder à pré-ênfase e estabelecer a resolução requerida.

Esse conhecimento pode obter-se por *uma medida* ou por uma estimativa grosseira, existindo métodos de cálculo numérico aproximado baseados em simples somas e diferenças dos valores discretos dados.

8.2. Um exemplo destas estimativas grosseiras (estimativa piloto) é o indicado no quadro IV (3),

Como vemos, parte-se dos dados todos, cujo espaçamento se supõe adequado à banda F. e calcula-se a soma dos quadrados das diferenças de valores contíguos.

Esta quantidade depende largamente do intervalo (f_N, $f_N/2$).

Passa-se para a oitava seguinte ($f_N/2$, $f_N/4$) pela mesma técnica, somando prèviamente os valores 2 a 2 e tomando apenas 1 sim e 1 não, o que equivale a duplicar o espaçamento.

E assim sucessivamente até ficarmos reduzidos ao quadrado da soma de todos os dados — estimativa da banda mais baixa.

Os valores obtidos são (muito grosseiramente) proporcionais às *potências* relativas aos sucessivos intervalos de oitava, a partir de f_N no sentido descendente (fig. 8-1).

Para melhores aproximações existem métodos mais precisos (4).

9. CONCLUSÕES

As normas gerais que acabamos de descrever não podem constituir um critério *exacto* de avaliação de *todo* e *qualquer* espectro de potência.

Não constituem um critério exacto, porque como já referimos, existem causas de erro que derivam do facto real de os processos em estudo se afastarem mais ou menos dos modelos matemáticos que lhes atribuimos.

---

(1) Note-se que se tem $< W^i(f) > = Q\ f) * W_a(f)$ e que multiplicar $W^i(f)$ por $1/Y(f)$ não é o mesmo que fazê-lo para $W_a(f)$ a menos que $Y(f)$ seja constante. Como porém o domínio da convolução é pràticamente muito pequeno comparado com $f_N/4$, $Y(f)$ pode tomar-se como constante em cada banda, o que valida o método.

(2) Ref. [1], pág. 44.

(3) Ref. [1], pág. 46.

(4) Ref. [1], pág. 135.

Este facto deve ser bem presente sempre que procuremos interpretar os resultados obtidos.

Por outro lado não se pode estabelecer um critério universal a menos que nos confinemos aos espectros pouco acidentados (à escala da frequência maior a analisar) e de frequência limitada bem definida F, para os quais a análise feita parece ser bastante satisfatória.

Na hipótese contrária, ou até por considerações de outra ordem que só cada caso pode impor, há que *estabelecer*, por exemplo, uma frequência máxima a analisar, desdobrar a análise em várias estimativas de diferente resolução e até estabilidade diversa, conjugar o estudo analítico com o experimental, enfim, um sem número de soluções que a prática e a finalidade de cada caso possam sugerir.

REFERÊNCIAS

[1] Blackman & Tukey — The Measurement of Power Spectra — Dover — 1958

[2] Ackasu — Measurement of Noise Power Spectra by Fourier Analysis, *J. App Physics* — vol. 32, n.º 4, pág. 565.

[3] Abreu Faro — Determinação do espectro de potência e da função de autocorrelação a partir de séries no tempo — *Técnica* — Outubro 1959.

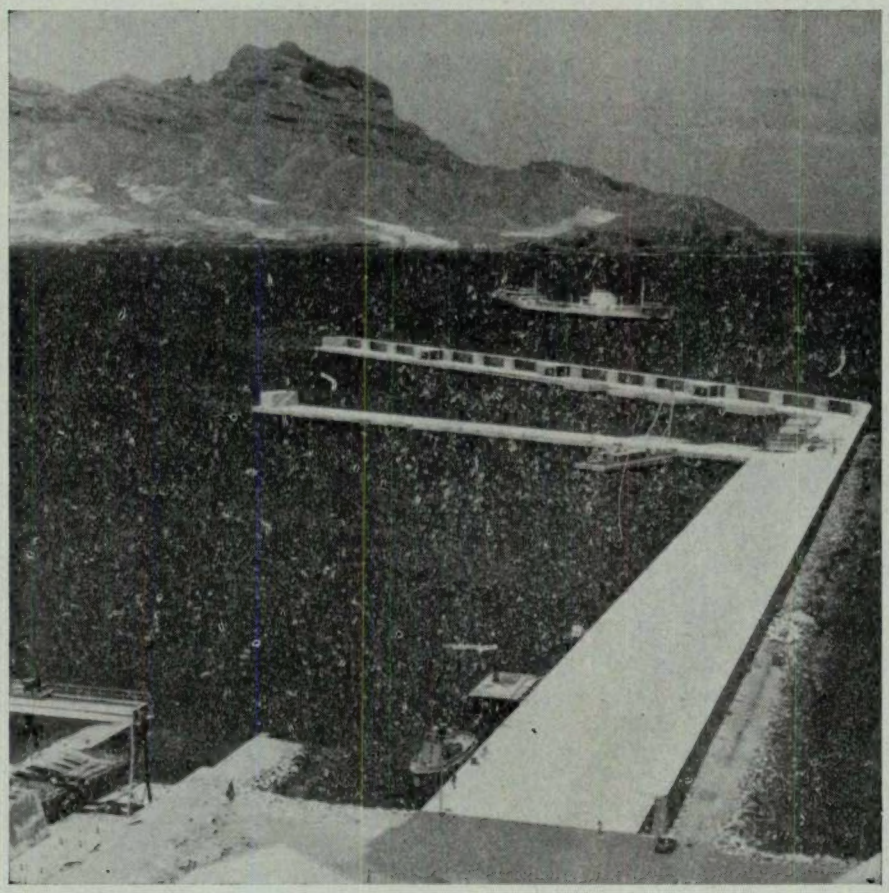
— Bases teóricas para a determinação experimental do espectro de potência *Técnica* — Outubro 1960.

PORTO DE S. VICENTE

O MAIOR MOLHE ACOSTÁVEL DE PORTUGAL

1400 METROS DE CAIS

600 METROS EM FUNDOS DE (− 11,50 m)



PROJECTO E CONSTRUÇÃO
DE

Construções Técnicas, Ld.a

SEDE: PRAÇA DO MUNICÍPIO, 13-3.º — LISBOA

TELEFS. 36 65 06 (4 LINHAS)

Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações, L.da

Associada: Empresa de Sondagens e Fundações

TEIXEIRA DUARTE, LDA.

SONDAGENS geológicas e geotécnicas — CAPTAÇÕES de águas subterrâneas — REBAIXAMENTOS do nível freático — CONSOLIDAÇÕES E ESTABILIZAÇÃO do solo — INJECÇÕES de cimento e outros produtos — INFRAESTRUTURAS de barragens, túneis e pontes — FUNDAÇÕES de todos os tipos

Única Empresa da especialidade com sede no Ultramar Português

Sede — LUANDA
Rua Serpa Pinto, 60
C. P. 2178 — Tel. 4226

LISBOA
P. da Figueira, 18, 3.º Esq.

L. MARQUES — C. P. 982
BEIRA — C. P. 1002

Cálculo de Pórticos

Método de cálculo simples e rápido, entrando em linha de conta com o deslocamento dos nós

POR *G. KANI*

Tradução do Eng.º Aníbal S. A. Vieira

Edição da TÉCNICA

PREÇO 50$00

Desconto aos Assinantes: 10 %

C. D. U. 624.042.7 (063) (100)
624.058.8 (063) (100)

A II CONFERÊNCIA MUNDIAL DE ENGENHARIA SÍSMICA

POR J. FERRY BORGES
Engenheiro Investigador
Chefe do Serviço de Edifícios e Pontes do
Laboratório Nacional de Engenharia Civil

O presente trabalho foi apresentado durante a «Reunião sobre Construção Anti-Sísmica» efectuada no Laboratório Nacional de Engenharia Civil em 27 e 28 de Fevereiro de 1961. Nele se relatam as orientações seguidas e os principais resultados obtidos pela II Conferência Mundial de Engenharia Sísmica, no estudo dos seguintes problemas:

a) *Comportamento das estruturas durante os sismos e equipamento para o estudo de tal comportamento.*
b) *Movimentos vibratórios do solo durante um sismo. Influência dos tipos de terrenos de fundação.*
c) *Dimensionamento de construções anti-sísmicas. Regulamentos. Sismos recentes e danos consequentes.*

1 — INTRODUÇÃO

A II Conferência de Engenharia Sísmica teve lugar em Tóquio em Julho de 1960 (1) e deu continuidade a uma primeira conferência realizada na Califórnia em 1956.

Participaram nesta segunda conferência cerca de 600 engenheiros e outros especialistas, tendo sido apresentados perto de 120 trabalhos. Estes trabalhos tiveram qualidade e originalidade tal que bem pode afirmar-se que a conferência marcou o início duma nova época neste ramo de engenharia.

A aplicação de conceitos muito recentes e de novos instrumentos de investigação permitiu obter conclusões que terão reflexos técnicos de grande importância. De facto, os fenómenos sísmicos sòmente são convenientemente explicados recorrendo à mecânica das vibrações aleatórias que tem sido desenvolvida nos últimos anos. Sòmente, também, os computadores analógicos e digitais constituem a ferramenta adequada à análise teórica do comportamento dinâmico de estruturas complexas.

Finalmente, ùnicamente graças a aparelhos de realização também muito recente é possível efectuar estudos experimentais satisfatórios. Compreende-se pois que num futuro próximo se assista a um grande desenvolvimento da engenharia sísmica.

Graças a uma comparticipação da Fundação Calouste Gulbenkian, que cumpre agradecer, teve o Autor possibilidade de participar na Conferência, para a qual preparou uma comunicação (2) em que se discutiam as orientações mais convenientes para o estabelecimento da regulamentação de construção anti-sísmica. Durante a Conferência apresentou também resultados quantitativos relativos aos coeficientes sísmicos de várias construções danificadas durante o sismo de Agadir, resultados esses de interesse para o julgamento dos valores dos coeficientes sísmicos correntemente adoptados (3).

O grande trabalho dispendido pelo Japão, para a organização da conferência, traduziu-se em enorme eficiência e proveito para os participantes. Além das sessões de trabalho, que se desenvolveram simultâneamente em duas salas, teve lugar uma exposição, principalmente de equipamento, e efectuaram-se ainda visitas aos vários institutos de investigação de Tóquio em que se estudam problemas sísmicos.

Reuniões efectuadas entre delegados dos diferentes países conduziram à demonstração da necessidade de constituir uma associação internacional que permitisse dar continuidade a estas reuniões. Tal associação está sendo formada e, graças a ela, será possível efectuar a próxima conferência mundial.

O estudo que se apresenta, além de procurar

sintetizar os principais resultados obtidos na conferência referida, pretende fornecer um panorama geral da evolução que têm sofrido os principais problemas de engenharia sísmica.

2 — COMPORTAMENTO DAS CONSTRUÇÕES DURANTE UM SISMO E EQUIPAMENTO PARA O ESTUDO DE TAL COMPORTAMENTO.

A matéria correspondente a este assunto pode ainda subdividir-se conforme se trata de análise teórica (em regime elástico ou plástico) ou de análise experimental (incluindo estudos sobre modelos e protótipos) e instrumentos para o estudo do comportamento dinâmico. Analisa-se portanto seguidamente, cada um destes problemas.

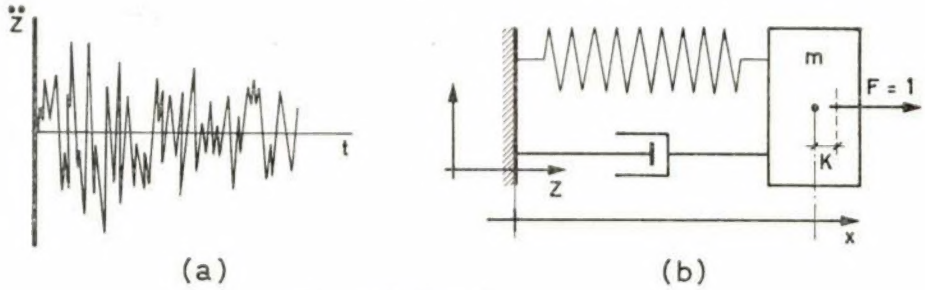
2.1 — *Análise teórica do comportamento das estruturas em regimen elástico*

Os esquemas teóricos simples assimilam as estruturas a osciladores elásticos, com ou sem amortecimento, e de um ou vários graus de liberdade.

São numerosos os estudos recentes que consideram o comportamento dum oscilador harmónico, de um grau de liberdade, com diferentes graus de amortecimento, sob a acção de movimentos vibratórios registados quando de sismos reais, devendo mencionar-se, em particular, os estudos iniciais de Housner (4) que bem se pode considerar terem pràticamente constituído a base da engenharia sísmica moderna.

Para descrever o comportamento dum oscilador, interessa introduzir a noção de espectro.

Considere-se que se dispõe do registo do movimento do terreno, numa dada direcção, obtido por um sismógrafo, fig. 1 a). A partir de registos de acelerações pode passar-se para velocidades ou deslocamentos por conveniente integração. Analise-se a resposta dos osciladores harmónicos amortecidos de diferentes períodos próprios e com diferentes graus de amortecimento, quando o terreno sofre acelerações de acordo com o diagrama indicado. Designando por $\ddot{z}$ (t) a aceleração do terreno, é fácil demonstrar que a velocidade relativa do oscilador em relação ao terreno pode ser calculada pelo integral também indicado na fig. 1. Tal integral permite calcular os valores máximos dos deslocamentos, velocidades ou acelerações relativas. Por conveniência, considerem-se as velocidades. Marcadas, num diagrama, estas velocidades máximas em função do período, obtém-se um conjunto de pontos, que uniremos por segmentos de recta. O diagrama assim obtido designa-se por espectro da velocidade máxima, fig. 2.



$$\dot{X} = \int_0^t \ddot{Z}\, e^{-\beta w (t-\tau)} \cos w (t-\tau)\, d\tau$$

$$w = \frac{2\pi}{T} = 2w\sqrt{\frac{K}{m}} \qquad f = \frac{1}{T}$$

β — fracção do amortecimento crítico

$S_v = \max \dot{X}$ = espectro de velocidade

$S_d = \frac{T}{2\pi} S_v$ — espectro de deslocamento

$S_a = \frac{2\pi}{T} S_v$ — espectro de aceleração

Fig. 1 — Comportamento dum oscilador harmónico

Este espectro indica, pois, quais as velocidades máximas sofridas pelas estruturas simples do tipo considerado. Interessa frisar que, na gama de períodos compreendidos entre 0,5 e 3 segun-